Ю. С. Владимиров

ФИЗИКА ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ

ПРИРОДА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Платон мне друг, но истина дороже

Аристотель

СЕРИЯ
RELATA REFERO

URSS

Relata Refero

Ю. С. Владимиров

ФИЗИКА ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ

ПРИРОДА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

URSS
МОСКВА

УДК 530.12 539.12
ББК 22.311 22.312

Владимиров Юрий Сергеевич

Физика дальнодействия: Природа пространства-времени.
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 224 с. (Relata Refero.)

В настоящей книге изложен реляционный подход к природе классического пространства-времени, альтернативный используемой ныне его субстанциальной трактовке. В этом подходе пространство-время имеет не априорный характер фона (арены), на котором строится физика, а является системой отношений между событиями с участием материальных объектов; нет объектов — нет и пространства-времени. Математическую основу реляционного подхода составляют теории унарных (на одном множестве) и бинарных (на двух множествах элементов) систем отношений. В первых двух главах произведена переформулировка геометрии пространства-времени на основе теории унарных систем вещественных отношений. В третьей главе показано, что имеется класс более элементарных — бинарных — геометрий, от которых можно перейти к известным геометриям. На их основе в дальнейших главах развита бинарная система комплексных отношений — своеобразная предгеометрия. Показаны ее проявления в физике микромира, и выявлены истоки таких свойств классического пространства-времени, как размерность, сигнатура и квадратичный характер мероопределения.

Книга предназначена для специалистов в области теоретической физики, студентов физико-математических факультетов университетов, а также лиц, интересующихся принципами построения физики и имеющих достаточный уровень подготовки.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ ».
117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×90/16. Печ. л. 14. Зак. № ЖУ-23.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-03087-8

Содержание

От издательства 7

Предисловие 9

Введение 17

0.1. Пространство-время как одна из трех категорий классической физики 17

0.2. Пространство-время в трех парадигмах современной физики 20

0.3. Развитие реляционной концепции 24

0.4. Главная задача фундаментальной теоретической физики 27

Глава 1. ***Классические пространственно-временные отношения*** 33

1.1. Евклидова геометрия как система отношений 34

1.1.1. Система отношений, соответствующая евклидовой геометрии 34

1.1.2. Представление геометрических понятий через миноры 38

1.2. Основные понятия пространственно-временных отношений 41

1.3. (1+3)-расщепление пространства-времени 46

1.4. Координата времени произвольного события 49

1.5. Система отношений в пространстве скоростей 51

1.6. Связь двух видов систем отношений 52

1.7. Выводы и замечания 55

Глава 2. ***Унарные системы вещественных отношений*** 59

2.1. Постановка задачи 60

2.2. Виды унарных систем вещественных отношений 62

2.2.1. Вырожденные системы вещественных отношений 62

2.2.2. Антисимметричные системы отношений 63

2.2.3. Невырожденные системы вещественных отношений 66

2.2.4. Экзотические системы отношений 68

2.3. Переход от невырожденных УСВО к вырожденным 69

2.4. Выводы и замечания 73

Глава 3. ***Бинарные системы вещественных отношений*** 77

3.1. Истоки теории бинарных систем отношений 78

3.2. Принципы бинарной геометрии 80

3.3. Виды бинарных систем вещественных отношений 83

3.3.1. Диагональные бинарные системы отношений 84

3.3.2. Недиагональные бинарные системы отношений 86

3.4. Примеры переходов от бинарных систем вещественных отношений к унарным геометриям 88

3.4.1. Невырожденные системы отношений 89

3.4.2. Вырожденные системы отношений 90

3.5. Следствия открытия бинарных геометрий 91

Глава 4. ***Предгеометрия*** 95
4.1. Принципы бинарной геометрофизики 97
4.2. Бинарная система комплексных отношений ранга (3,3) 102
4.2.1. Канонический базис БСКО ранга (3,3) 102
4.2.2. Двухкомпонентные спиноры и группы их преобразований 105
4.3. Алгебра 2-компонентных спиноров 109
4.4. Переход от предгеометрии к геометрии Лобачевского 112
4.4.1. Изотропные векторы 112
4.4.2. Неизотропные векторы 115
4.5. Выводы и замечания 120

Глава 5. ***Системы отношений в физике микромира*** 123
5.1. Биспиноры и элементарные частицы 126
5.2. Образующие и базис алгебры Клиффорда C(1,3) 131
5.3. Определение массивной частицы 133
5.4. Массивная частица в собственной системе отношений 135
5.5. Прообраз уравнений Дирака 139
5.6. Бинарная геометрофизика и квантовая теория 144

Глава 6. ***Истоки понятия длины (метрики)*** 149
6.1. Бинарная система комплексных отношений ранга (2,2) 151
6.2. Физический смысл БСКО ранга (2,2) 154
6.3. Композиция БСКО рангов (3,3) и (2,2) 156
6.4. Две формы БСКО ранга (2,2) 159

6.5. Переход к 1-мерной унарной геометрии 161
6.6. Роль фазы в построении геометрии 163

Глава 7. ***Происхождение пространственно-временных отношений*** 169
7.1. Атомы как фактор, ответственный за пространственно-временные отношения 171
7.2. Истоки пространственно-временных отношений 174
7.3. Хроногеометрия 177
7.4. Система отношений римановой геометрии (на сфере) 182
7.5. Композиция двух систем отношений 185
7.6. Некоторые выводы и замечания 189

Заключение 193

Приложение. Гипотетическая геометрия на базе БСКО ранга (4,4) **203**
П.1. Трехкомпонентные финслеровы спиноры 204
П.2. 9-мерные векторы 209
П.2.1. Определение векторов 209
П.2.2. 9-мерные инварианты 212
П.3. Переходы от БСКО ранга (4,4) к унарным геометриям 215
П.4. Выводы и замечания 217

Литература 219

От издательства

Эта книга продолжает серию «Relata Refero» (дословный перевод — рассказываю рассказанное).

Под этим грифом издательство предоставляет трибуну авторам, чтобы высказать публично новые идеи в науке, обосновать новую точку зрения, донести до общества новую интерпретацию известных экспериментальных данных, etc.

В споре разных точек зрения только вердикт Великого судьи — Времени — может стать решающим и окончательным. Сам же процесс поиска Истины хорошо характеризуется известным высказыванием Аристотеля, вынесенным на обложку настоящей серии: авторитет учителя не должен довлеть над учеником и препятствовать поиску новых путей.

Мы надеемся, что публикуемые в этой серии тексты внесут, несмотря на свое отклонение от установившихся канонов, свой вклад в познание Истины.

Предисловие

Предлагаемое читателю исследование «Физика дальнодействия» включает три книги: «Природа постранства-времени», «Принцип Маха» и «Прямое межчастичное взаимодействие», в которых последовательно раскрывается реляционный подход (на базе теории систем отношений) к физике и геометрии. Принципиально важные положения развиваемой реляционной концепции содержатся в первой из названных книг, посвященной обсуждению традиционных вопросов мироздания: Что такое пространство? Что такое время? Зная теорию относительности, эти вопросы следует переформулировать: Что такое пространство-время? Почему оно обладает привычными свойствами размерности, сигнатуры, квадратичности мероопределения? и др.

Кардинальные вопросы фундаментальной теоретической физики, ставившиеся еще античными мыслителями, обсуждались на протяжении многих веков и, в частности, занимали центральное место в мировоззрении Э. Маха (1838–1916). В своей книге «Познание и заблуждение» он писал: «Кто хочет получить представление о том, с каким трудом развилась абстракция „пространство“, лучше всего сделает, обратившись к изучению четвертой книги Физики Аристотеля. Вопрос о том, *существует* ли пространство (место) или *не существует, как* оно существует и *что* оно такое, причиняют ему много затруднений. Он не может смотреть на пространство, как на тело, ибо тогда одно тело находилось бы в другом. Но, с другой стороны, он и не может отделить пространство от мира тел, ибо место тела есть для него то, что это тело окружает, обнимает. Аристотель выдвигает мысль, что мы не спрашивали бы о пространстве, если бы не существовало никакого движения. *Связь* представления пространства с представлением тела естественно приводит к идее *немыслимости пустоты* – идее, защищаемой Аристотелем и многими другими мыслителями древности. Мыслители, допускавшие пустоту, как Левкипп, Демокрит, Эпикур и др., имели, следовательно, представление о пространстве, более близкое к нашему. Пространство было для них чем-то вроде сосуда, который может и не быть наполнен. И к такому представлению действительно должна была вести геометрия, которая устраняет все телесные свойства, кроме определенных границ» [21, с. 417].

Далее Мах отмечал: «Можно, пожалуй, сказать, что главным образом именно со времени Ньютона время и пространство стали теми *самостоятельными* и однако *бестелесными* сущностями, которыми они считаются по настоящее время... Для Ньютона время и пространство представляют нечто *сверхфизическое*; они суть *первичные*, независимые *переменные*, непосредственно недоступные, по крайней мере, точно не определимые, направляющие и регулирующие все в мире. Как пространство определяет движение отдаленнейших планет вокруг Солнца, так время делает *согласными* отдаленнейшие небесные движения с незначительнейшими процессами здесь на земле. (...) Этот взгляд лежит, как наследие Ньютона, в основе и современной физики, хотя, может быть, чувствуется некоторое нежелание открыто это признать» [21, с. 421]. Сделанное замечание не утратило своей актуальности и в наши дни.

Взгляды на суть пространства и времени, высказывавшиеся, с одной стороны, Г. Лейбницем (1646–1716) и Э. Махом, а с другой – Демокритом (460–380 гг. до н. э.), И. Ньютоном (1643–1727) и большинством современных физиков, отражают два подхода к его пониманию: **реляционный и субстанциальный** (см. [8, 10, 11]). Последний достаточно хорошо известен: пространство-время представляет собой самостоятельную сущность, сцену, на которой строится здание всей физики и по которой распространяются поля. Желая это признавать или нет, подавляющее большинство современных физиков в своей деятельности придерживается именно субстанциального понимания.

Согласно менее разработанной реляционной интерпретации, пространство и время имеют смысл системы отношений между событиями (телами). Напомним высказывания ее выдающихся сторонников. Так, Г. Лейбниц в письмах к С. Кларку (а фактически к И. Ньютону) писал: «Я неоднократно подчеркивал, что считаю *пространство*, так же как и время, чем-то чисто относительным: пространство — *порядком существования*, а время *порядком последовательностей*... Для опровержения мнения тех, которые считают пространство субстанцией или, по крайней мере, какой-то абсолютной сущностью, у меня имеется несколько доказательств» [20, с. 441].

Позиция Лейбница разделялась Э. Махом, считавшим категории абсолютного пространства и времени «бессмысленными», поскольку в отсутствии тел нет ни пространства, ни времени. Так, Мах писал: «Время и пространство существуют в определенных отношениях физических объектов, и эти отношения не только вносятся нами, а существуют в связи и во взаимной зависимости явлений» [21, с. 372]. «Мы можем сказать, что *во временной зависимости выражаются простейшие непосредственные физические отношения*» [21, с. 417]. «*В пространственных отношениях находит свое выражение посредственная физическая зависимость*» [21, с. 417].

Важно подчеркнуть, что выбор одного из двух названных подходов к природе пространства-времени касается не только геометрии, но и самым непосредственным образом сказывается на способе построения физической теории. Дело в том, что эти подходы к природе пространства-времени представлены в физике двумя альтернативными концепциями описания взаимодействий: близкодействием и дальнодействием. В первой – взаимодействие между объектами осуществляется либо при непосредственном контакте, либо путем испускания одним телом сигнала, который последовательно передается от одной точки пространства-времени к другой, бесконечно ей близкой, до достижения второго тела, вступающего во взаимодействие с первым телом. В концепции же дальнодействия ничего не распространяется между телами, и они взаимодействуют друг с другом непосредственно на расстоянии.

Дискуссия по выбору одной из них началась со времен И. Ньютона и Г. Лейбница (и даже раньше) параллельно с обсуждением двух возможных подходов к природе пространства-времени. В XX веке этот вопрос был снова включен в повестку дня в работах А. Фоккера, Г. Тетроде, Я. И. Френкеля, Дж. Уилера и Р. Фейнмана [33], Ф. Хойла, Дж. Нарликара [26] и ряда других авторов, развивавших концепцию дальнодействия в виде теории прямого межчастичного взаимодействия. Легко понять, что субстанциальный подход к сущности пространства-времени лежит в основе доминирующих ныне теоретико-полевых представлений о мире, тогда как реляционный соответствует концепции дальнодействия.

Вопрос о выборе одного из двух подходов приобретает актуальность в связи с рядом проблем современной теоретической физики, которые долгое время не удается решить в рамках субстанциального подхода к природе пространства-времени и соответствующей ей концепции близкодействия. Назовем наиболее существенные из них.

1. В течение почти всего XX века безуспешно предпринимались попытки совмещения принципов квантовой теории и общей теории относительности на основе субстанциального подхода. Это делает актуальным решение этой проблемы в рамках реляционного подхода.

2. Имеется ряд веских доводов в пользу того, что в микромире классические пространство и время теряют силу. И здесь возникают вопросы: Можно ли считать закономерности квантовой теории проявлением нарушения свойств классической геометрии в микромире? Справедлив ли субстанциальный подход к природе пространства-времени в микромире? Ряд авторитетных авторов высказывал гипотезу, что в микромире вообще нужно отказаться от классического пространства-времени в обычном его понимании. В книге Б. Грина «Элегантная Вселенная», посвященной обсуждению модных сегодня теорий суперструн и бран, один из разделов так и называется «Что есть пространство и время на самом деле, и можем ли мы без них обойтись?». В нем говорится: «Нахождение корректного математического аппарата для формулировки теории струн без обращения к изначальным понятиям пространства и времени является одной из наиболее важных задач, с которыми сталкиваются теоретики» [1)].

3. Последние попытки объединения теорий фундаментальных физических взаимодействий на базе суперсимметричных теорий и суперструн, опирающиеся на субстанциальный подход, к успеху не привели. Есть основания надеяться, что в рамках реляционного подхода к физике эту проблему удастся решить.

4. В рамках общепринятого субстанциального подхода так и не удалось физически обосновать геометрические свойства классического пространства-времени, такие как его размерность, сигнатура (+−−−), квадратичный характер мероопределения и ряд других. Все эти свойства постулируются одновременно с априорным заданием классического пространства-времени.

[1)] *Грин Б.* Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. 5-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2011. С. 244.

5. Уже давно на повестке дня физики стоит вопрос о выводе классических пространственно-временных отношений из закономерностей физики микромира. Какие более элементарные понятия должны быть выбраны для решения этой задачи? Есть реальные надежды на то, что реляционный подход может подсказать это.

6. Рядом физиков и математиков была поставлена задача построения макроскопической теории пространства-времени, в которой классические понятия (длина, метрика, интервалы и др.) возникали бы в виде статистического итога из наложения огромного числа неких микрофакторов. Так, известный геометр П. К. Рашевский писал: «Между тем трудно сомневаться в том, что макроскопические понятия, в том числе и наши пространственно-временные представления, на самом деле уходят своими корнями в микромир. Когда-нибудь они должны быть раскрыты как некоторый статистический итог, вытекающий из закономерностей этого мира — далеко еще не разгаданных — при суммарном наблюдении огромного числа микроявлений»[2]. Есть веские основания полагать, что решение этой задачи невозможно в рамках субстанциальных представлений о сущности пространства-времени.

Кроме всего прочего, нужно иметь в виду, что субстанциальный подход (теория поля) интенсивно использовался более века, тогда как реляционный (концепция дальнодействия) долгое время находился в тени. Естественно попытаться исследовать его возможности для решения как перечисленных, так и ряда других назревших проблем.

Возникшие в последнее время новые математические методы описания систем отношений между элементами произвольной природы открывают новые возможности для исполь-

[2] *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. С. 258; 7-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2010.

зования реляционного подхода в геометрии и физике. Здесь имеется в виду так называемая *теория физических структур*, развиваемая с середины 1960-х годов в Новосибирске Ю. И. Кулаковым и его учениками [13]. По своей сути это универсальная (алгебраическая) теория метрических отношений. На основе ее принципов можно описывать как известные, так и некоторые новые виды геометрий, в частности *бинарные геометрии* (на двух множествах элементов).

Данная книга посвящена последовательному развитию реляционного взгляда пространство-время, начиная с реляционной переформулировки 4-мерных пространственно-временных отношений. Далее рассматривается переход от них к более элементарным бинарным геометриям, а затем – их комплексификацию с демонстрацией того, что в фундаменте физического мироздания лежат именно бинарные системы комплексных отношений (геометрии), и, наконец, обратное возвращение к классическим геометриям.

Предполагается, что читатель владеет основами математики и физики хотя бы в объеме двух-трех университетских курсов физико-математических факультетов. Упрощенное (без формул) изложение данного материала можно найти в нашей книге [11].

Автор выражает признательность Ю. И. Кулакову, Г. Г. Михайличенко и В. Х. Льву за плодотворное многолетнее сотрудничество, отличающееся доброжелательностью и искренней теплотой. Автор благодарит всех участников школ и совещаний по теории физических структур, а также семинаров Российского гравитационного общества «Геометрия и физика», работающих в течение многих лет на физическом факультете МГУ, за многократные обстоятельные дискуссии по затронутым в книге проблемам.

Введение

Поставленные выше вопросы о природе пространства и времени не совсем корректны. Сформулируем их иначе, предложив несколько вариантов. Первый из них может звучать так: Что мы подразумеваем в физике всякий раз, когда пользуемся понятием пространства-времени? В этой постановке вопроса наиболее строгим ответом является построение аксиоматики используемой геометрии, однако при ее построении, как правило, закладывается чрезвычайно важное допущение: полагается, что пространство-время представляет собой самостоятельную категорию, выполняющую роль «вместилища» всего сущего, в которое, как на арену, помещаются частицы, тела и поля, переносящие взаимодействия. Это допущение уже означает субстанциальный подход к природе пространства-времени и поэтому он нам не подходит.

Другая постановка вопроса подразумевает построение некой конструкции на новых принципах, из которой бы вытекали общепринятые представления о классическом пространстве-времени. Это именно тот путь, который развивается в нашем исследовании. Но прежде, чем по нему пойти, необходимо более внимательно взглянуть на основания современной физики.

0.1. Пространство-время как одна из трех категорий классической физики

В классической общей физике, изучаемой в школе и вузах, рассматриваются тела (частицы), которые находятся не иначе, как в пространстве-времени и взаимодействуют друг с другом через поля: гравитационное, электромагнитное и иные. Это, казалось бы, очевидное утверждение означает выделение из представлений о цельной физической реальности именно **трех** физических (метафизических) категорий: **(П-В)** пространства-времени, **(Ч)** частиц (тел) и **(П)** полей переносчиков взаимодействий [8]. Данные категории так или иначе лежат в основаниях всех развивающихся в физике теорий и программ. В этом проявился весьма плодотворный для соответствующего этапа развития науки метафизический редукционизм.

Фундаментальный характер именно названных трех категорий проявляется в главном уравнении классической механики – во втором законе Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}$. В его трехчленной формуле масса m является характеристикой категории частиц (тел), ускорение $\vec{a}$ – соответствует категории пространства-времени, а стоящая справа сила – категории полей переносчиков взаимодействий.

В учебниках и в большинстве книг по физике названные категории в значительной степени имеют самостоятельный характер. Допускается изучение свойств пространства-времени без частиц и полей, можно рассматривать также свободные электромагнитное или гравитационное поля без частиц или свободные частицы (тела) без полей.

Отнесем физические теории такого рода к теориям *триалистической метафизической парадигмы*, что подчеркивает троичный характер метафизических оснований данного подхода к реальности.

Представляется удобным наглядно представить изложенное с помощью рис. 0.1, на котором единое физическое мироздание изображается в виде куба, построенного на трех осях, соответствующих названным физическим категориям триалистической парадигмы.

Одна из вершин куба выбрана в качестве начала координатных осей, олицетворяющих три категории. Первая (по вер-

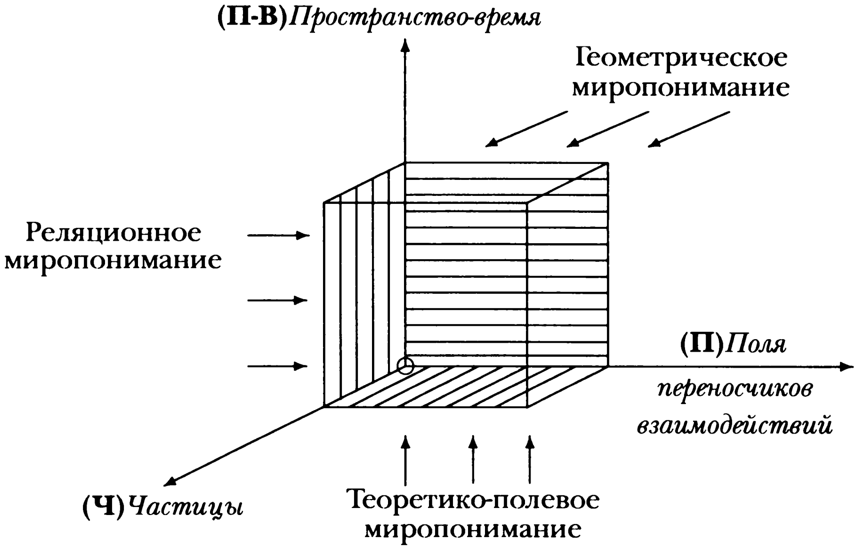


Рис. 0.1. Куб физического мироздания, построенный на трех метафизических категориях

тикали) – категория пространства-времени, вторая (по горизонтали вправо) – категория полей-переносчиков взаимодействий и третья (направленная вперед) – категория частиц. Физические теории триалистической парадигмы, можно сказать, описывают мироздание через проекции на три оси-ребра куба.

Возникает соблазн полагать, что мы поймем физическое мироздание, если разберемся в сути названных трех категорий. Однако не будем спешить и вспомним пророческие слова Эрнста Маха, сказанные сто лет тому назад в период перехода от ньютоновой механики к представлениям новой физики (теории относительности и квантовой механики): «Средствам мышления физики, понятиям массы, силы, атома, вся задача которых заключается только в том, чтобы побудить в нашем представлении экономно упорядоченный опыт, большинством естествоиспытателей приписывается реальность, выходящая за пределы мышления. Более того, полагают, что эти силы и массы представляют то настоящее, что подлежит исследованию, и если бы они стали известны, все остальное получилось бы само собою из равновесия и движения этих масс... Мы не должны считать *основами* действительного мира те интеллектуальные вспомогательные средства, которыми мы пользуемся для *постановки* мира *на сцене нашего мышления*» [21, с. 432].

Это в полной мере относится и к понятиям, соответствующим всем трем названным физическим категориям. Согласно Маху, используемые ныне как классические, так и обобщенные новые категории являются лишь временными, вспомогательными понятиями, удобными для восприятия мироздания на соответствующем этапе развития физики. Об этом свидетельствует развитие физики в XX веке.

0.2. Пространство-время в трех парадигмах современной физики

Анализ развития фундаментальной теоретической физики в XX веке (см. [8]) убедительно свидетельствует о том, что физики-теоретики осознанно или неосознанно пытались опереться не на три, а на меньшее число из названных или обобщенных категорий. Естественно, что главным образом изучались возможности построения физической картины мира на основе не трех, а **двух** категорий: обобщенной, объединяющей в себе две категории, и оставшейся (или даже двух обобщенных категорий). Такие теории можно назвать *дуалистическими*. К их числу, в частности, относятся как общая теория относительности, так и квантовая теория.

Имея три варианта объединения двух категорий из трех, получаем **три** типа физических теорий (дуалистических парадигм), или *три миропонимания* одной и той же физической реальности, рассматриваемой под разными углами зрения. На рис. 0.1 они наглядно представлены стрелками, соответствующими взгляду на куб физического мироздания с трех, взаимно перпендикулярных позиций.

Назовем *теоретико-полевым миропониманием* теорию (метафизическую парадигму), основанную на объединении категорий частиц и полей. В данном подходе вместо этих двух категорий выступает новая **обобщенная категория поля амплитуды вероятности**, описываемая волновыми функциями в классическом пространстве-времени. На рисунке теоретико-полевое миропонимание соответствует взгляду на куб физической реальности снизу. Этот подход определял главное, можно сказать, магистральное направление развития физики в XX веке. К теориям этой парадигмы относятся квантовая механика и квантовая теория поля, в которых симметричным образом рассматриваются (бозонные) поля переносчиков взаимодействий и (фермионные) поля частиц. Апогей данного подхода проявился в открытых во второй половине XX века суперсимметричных преобразованиях между фермионными и бозонными волновыми функциями. Эта же линия продолжается в исследованиях суперструн и бран.

В теоретико-полевой парадигме категория пространства-времени сохраняет свой прежний характер и по-прежнему представляет собой сцену или арену, на которой определяется обобщенная категория поля амплитуды вероятности и из которой строится вся физика.

В двух других названных дуалистических парадигмах вместо категории классического (плоского) пространства-времени выступают некие новые обобщенные категории, включающие в себя как само пространство-время, так и одну из двух других исходных категорий.

Назовем *геометрическим миропониманием* описание физической реальности на основе обобщенной категории, включающей в себя прежние категории пространства-времени и полей переносчиков взаимодействий. Таковой является новая **категория искривленного пространства-времени**, деформируемого содержащимися в нем частицами (телами). Этот подход соответствует взгляду на куб физической реальности со стороны его задней грани, характеризуемой ортами категорий пространства-времени и полей переносчиков взаимодействий. Центральное место здесь занимает эйнштейновская общая теория относительности, в которой нет отдельно плоского пространства-времени и отдельно гравитационного поля, а есть обобщенная категория искривленного пространства-времени, куда вложена категория частиц. К этому же классу теорий относятся многомерные геометрические модели физических взаимодействий, называемые ныне теориями Калуцы и Клейна, где, кроме гравитации, геометризуются и другие виды физических взаимодействий, в первую очередь, — электромагнитное.

Имея в виду именно эту геометрическую парадигму с таким пониманием новой обобщенной категории, Дж. Уилер сказал: «Пространство-время не есть арена для физики, это вся классическая физика» [34, с. 334].

Два названных дуалистических миропонимания соответствовали двум главным направлениям развития фундаментальной теоретической физики в XX веке: квантовой теории и общей теории относительности. Однако даже беглого взгляда на рис. 0.1 достаточно, чтобы заподозрить существование еще одного, — третьего, — дуалистического миропонимания, соответствующего взгляду на физическую реальность слева, со стороны осей категорий пространства-времени и частиц. Оказывается, это миропонимание также развивалось и даже было доминирующим в середине XIX века, а затем оказалось в тени. Речь идет о теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера—Фейнмана, которая основывается на концепции дальнодействия, альтернативной общепринятой концепции близкодействия, воплощенной в теории поля. Назовем этот подход к физической реальности *реляционным миропониманием.* (История развития реляционной парадигмы от работ Г. Лейбница и Э. Маха до наших дней изложена в нашей книге «Вслед за Лейбницем и Махом» [11].)

Главной целью физиков-теоретиков было и остается построение единой теории физических взаимодействий, включающей в себя и общую теорию относительности. Поскольку три вида взаимодействий (электромагнитное, слабое и сильное) описывались в рамках теоретико-полевого миропонимания, а гравитационное — в рамках геометрического подхода, то объединяемые теории оказались построенными на базе принципиально различных категорий. Это явилось главной (метафизической) причиной неудач, постигнувших физиков-теоретиков. Решить данную проблему можно лишь на пути создания новой физической картины мира на основе **единой обобщенной категории**. Пока еще она по-разному «видится» с каждой из трех сторон куба: единый вакуум в теоретико-полевом подходе, единая геометрия в геометрическом миропонимании или единая система отношений (структура) в реляционном миропонимании. На наш взгляд, это разные названия одного и того же физического (метафизического) первоначала — того, что лежит «за», «над» или «под» физикой и составляет ядро (холон) монистической парадигмы, причем различие обусловлено предварительным, пока еще неполным его знанием в отдельных миропониманиях.

Другими словами можно сказать, что названные три вида физических теорий, определявших лицо физики XX века, свидетельствуют о том, что доминирующей была тенденция перехода от триалистической парадигмы, сформулированной еще Ньютоном, через дуалистические к *монистической парадигме*, опирающейся на единую обобщенную категорию.

Таковы вкратце основные выводы метафизического характера, которые вытекают из анализа развития теоретической физики XX века.

0.3. Развитие реляционной концепции

Современная наука (физика и математика) достаточно преуспела в построениях и в изучении возможных (непрерывных) математических моделей пространства-времени. Развит мощный аппарат дифференциальной геометрии, на который опирается вся ОТО и многочисленные возможные ее обобщения. И все это находится в арсенале сторонников субстанциальной концепции пространства-времени. А что могут этому противопоставить сторонники реляционной концепции? До самого последнего времени не так уж и много, — главным образом, рассуждения философского характера, кое-какие математические фрагменты и далеко не всеми разделяемую концепцию дальнодействия в физике, именуемую как теория прямого межчастичного взаимодействия (action at a distance) (см. [4]). Однако, продвинувшись в описании физических взаимодействий, сторонники этой теории остановились перед задачей построения реляционной концепции самого пространства-времени. Декларируя его реляционный характер, в теории прямого межчастичного взаимодействия на самом деле опираются на уже готовое (чаще всего плоское) 4-мерное пространство-время.

И вот в 1960-х годах в Новосибирске в работах Ю. И. Кулакова [13, 16] и его учеников Г. Г. Михайличенко [23–25] и В. Х. Льва [17–19] была развита своеобразная теория, названная *теорией физических структур*. Ее появление не было связано ни с теорией прямого межчастичного взаимодействия, ни с противопоставлением субстанциальной и реляционной концепций пространства-времени. Возникла она из совсем иных соображений. Однако теория физических структур закладывала основы универсальной алгебраической теории отношений между элементами (объектами) произвольной природы. А ее исходными положениями были элементы одного или двух множеств и отношения между ними (вещественные числа). И далее из соображений равноправности элементов развивалась содержательная теория возможных отношений.

Напомним, что понятие отношения является ключевым в мировоззрениях Лейбница и Маха и заменяет у них идею абсолютного пространства и времени. Данное понятие определило и название всего реляционного (англ. relation, латин. relativus – относительный) подхода. Попутно заметим, что термины «реляционный» и «релятивистский» имеют различное значение. Не следует понимать «отношение» в алгебраическом смысле как результат деления одной величины на другую. Утвердившийся термин ближе по своему значению к общепринятому пониманию отношений между людьми, являясь как бы числовой характеристикой плохих (отрицательных) или хороших (положительных) отношений.

В работах новосибирской группы было показано, что, например, евклидовы 3-мерные пространственные отношения можно трактовать как частный случай физических структур на одном множестве элементов с вещественными отношениями. Оказалось, что как частные случаи возникают также другие известные (и недостаточно известные) виды геометрий.

Для решения поставленной выше проблемы вывода теории классического пространства-времени из более элементарных понятий, проявляющихся в физике микромира, чрезвычайно важным оказалось открытие Кулаковым бинарных (на двух множествах элементов) структур (*бинарных геометрий*). От них можно перейти к структурам на одном множестве элементов, но не наоборот.

Согласно теории Кулакова, физические структуры описывают законы физики (отсюда и ее название). Это обосновывается тем, что ряд законов общей физики (2-й закон Ньютона, закон Ома и некоторые другие) может быть переформулирован на языке теории физических структур. Еще раз подчеркнем, что в группе Ю. И. Кулакова рассматриваются лишь вещественные отношения.

В связи с тем, что в современной теоретической физике довольно ярко выражена тенденция геометризации физических понятий и фундаментальных взаимодействий, возникла мысль применить для этих целей новые, – более элементарные, – бинарные геометрии. Причем для описания физики микромира оказалось необходимым их обобщить на случай комплексных отношений. Это позволило показать, что ряд понятий таких геометрий уже давно используется в современной теоретической физике. Это, прежде всего, понятия спиноров, амплитуд вероятностей в квантовой механике, цветов кварков в теории элементарных частиц и многие другие.

В данной, первой, книге из серии «Физика дальнодействия» рассмотрена реляционная теория именно пространственно-временных отношений как классических, так и принадлежащих физике микромира. Изложенный здесь материал можно пояснить с помощью ранее использованного куба физической реальности с только одной заштрихованной (левой) гранью (см. рис. 0.2). Еще раз подчеркнем, что в данном подходе принципиально важное значение приобретает тот факт, что в нем отсутствует априорно заданный фон в виде пространства-времени. Это понятие возникает лишь между событиями с участием материи, что трактуется как переход от двух категорий триалистической парадигмы (пространства-времени и материи) к новой обобщенной категории пространственно-временных отношений.

Вторая обобщенная физическая категория, описывающая взаимодействия, на этой схеме соответствует противоположной (правой) грани куба физической реальности. Она подробно рассматривается в другой книге данной серии «Прямое межчастичное взаимодействие».

Полная реляционная теория как пространства-времени, так и физических взаимодействий названа нами *бинарной геометрофизикой*. В этот термин заложено, во-первых, то, что теория опирается на бинарные системы отношений, во-вторых, что

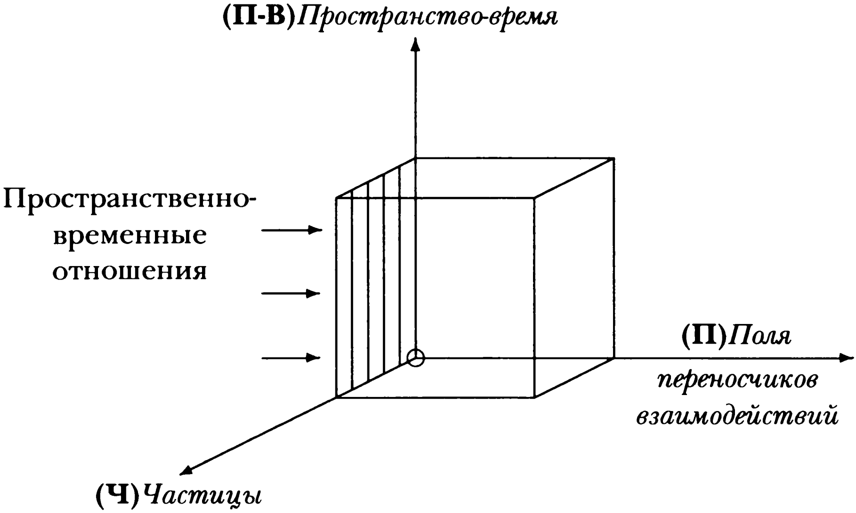


Рис. 0.2. Пространственно-временные отношения как категория реляционного миропонимания

эти конструкции представляют собой своеобразные (бинарные) геометрии, и, в-третьих, что эти геометрии предлагается положить в фундамент физики и теории физического пространства-времени. Бинарная геометрофизика использует основные идеи математического аппарата теории физических структур Кулакова, однако она принципиально отличается от последней как по видению проблемы, так и по способу ее решения.

0.4. Главная задача фундаментальной теоретической физики

В настоящее время ключевой задачей фундаментальной теоретической физики является, с нашей точки зрения, вывод классических пространственно-временных представлений из неких понятий физики микромира вместо его постулирования в качестве первичного фона, на котором возводится теория физического мироздания. И здесь неизбежно возникает вопрос: До каких пор мы будем рассматривать пространство-время как нечто изначально заданное?

Решение этой ключевой фундаментальной проблемы возможно лишь на основе реляционной парадигмы, ибо теории как теоретико-полевой, так и геометрической парадигмы исходят из обязательного наличия пространственно-временного многообразия, плоского или искривленного (закрученного и т. д.). Без него теряют смысл как понятие поля, так и большинство других привычных понятий.

Цель настоящей книги состоит в том, чтобы как можно дальше продвинуться по пути решения проблемы вывода классического пространства-времени из неких понятий физики микромира. Каждая из глав книги представляет собой шаг в этом направлении, как правило, основанный на идеях, ранее высказывавшихся различными авторами. В данном изложении они складываются в цельную систему более элементарных представлений.

В первой главе рассматривается идея реляционной природы классического 4-мерного пространства-времени Минковского, представленного в виде унарной системы отношений между дискретным набором произвольных событий. Это делается на основе закона, связывающего 6 произвольных точек-событий в виде равенства нулю определителя Кэли–Менгера, элементами которого являются интервалы между парами событий. Далее обсуждаются вопросы 1+3-расщепления пространства-времени на 1-мерное время и 3-мерные отношения в евклидовом пространстве, а также закон, характеризующий пространство скоростей.

При введении законов систем отношений в качестве фундаментальных положений, ответственных за классические пространственно-временные отношения и отношения в пространстве скоростей, невольно возникают вопросы об их истоках.

Во второй главе изложены ответы на эти вопросы, предложенные на классическом (не квантовом) уровне в работах Ю. И. Кулакова и его группы [13, 14, 16] в виде теории унарных физических структур. Их суть состояла в следующем. Если предположить наличие неких законов отношений между r элементами одного множества и их выполнимость для любых наборов из r элементов этого множества, то при некоторых вспомогательных условиях можно записать систему функционально-дифференциальных уравнений и, решив их, найти все возможные виды законов унарных систем вещественных отношений. Как выяснилось, приведенные в первой главе законы представляют собой частные решения записанных уравнений.

Третий шаг на пути раскрытия природы пространства-времени связан с открытием Кулаковым новых видов геометрий, характеризуемых законами для вещественных отношений между элементами двух множеств. Поскольку задача на двух множествах ставится так же, как и на одном множестве, где получаются законы унарных геометрий, то теории на двух множествах элементов следует понимать соответствующими новому классу геометрий – бинарных. Они оказались проще случая на одном множестве элементов, но самое главное состоит в том, что от них своеобразной склейкой элементов из разных множеств можно перейти к законам, соответствующим общепринятым унарным геометриям. Следовательно, широко используемые в физике унарные геометрии можно считать производными от более элементарных бинарных геометрий. Это сразу же открывает новый взгляд на природу классического пространства-времени, а также на природу физических взаимодействий.

Следующий этап в развитии представлений о природе классического пространства-времени состоит в использовании более элементарных бинарных геометрий для описания явлений физики микромира, в частности, закономерностей квантовой механики. Поскольку физика микромира описывается не вещественными, а комплексными отношениями, то, чтобы это сделать, необходимо комплексифицировать теорию бинарных систем отношений. В четвертой главе описаны общие свойства таких геометрий и на базе бинарной системы комплексных отношений (БСКО) минимального невырожденного ранга (3,3) построена предгеометрия. В предгеометрии оказалась естественным образом выделенной 6-параметрическая группа преобразований $SL(2, C)$, а элементы характеризуются 2-компонентными спинорами, что позволяет сделать вывод, что БСКО ранга (3,3) ответственна как за 4-мерность, так и за сигнатуру $(+---)$ классических пространственно-временных отношений.

В пятой главе показано, что главные понятия и свойства предгеометрии уже давно используются в современной квантовой теории и в физике микромира. Это продемонстрировано на описании элементарных частиц в привычных терминах через биспиноры, под новым углом зрения рассмотрены положения стандартной теории вплоть до записи прообраза уравнений Дирака для свободной частицы в импульсном пространстве.

В шестой главе в рамках бинарной геометрофизики намечен путь решения фундаментальной проблемы, связанной с возникновением понятия длины (метрики) в геометрии, которая была сформулирована еще в знаменитом мемуаре Б. Римана. Показано, что истоком следует считать БСКО минимального ранга (2,2), являющейся подсистемой отношений БСКО ранга (3,3).

В седьмой главе утверждается, что разделение систем отношений на пространственно-временные и в пространстве скоростей обусловлено наличием связанных систем из элементарных частиц двух противоположных зарядов (атомов, молекул и т. д.).

Бинарная геометрия микромира свидетельствует о фундаментальном характере представления классических пространственно-временных представлений в 2+2-расщепленном виде, где одна часть этого расщепления представляется хроногеометрией, а вторая часть – заданием двух угловых координат. Примечательно, что это расщепление ранее рассматривалось в ряде теоретических работ [1, 29] и широко используется на практике в виде радиолокации, основанной на посылке и приеме отраженных электромагнитных сигналов. В заключительной, седьмой, главе закон УСВО ранга (4), соответствующий пространству-времени Минковского, выводится из композиции двух унарных систем вещественных отношений, отражающих закономерности БСКО рангов (3,3) и (2,2). Таким образом, здесь замыкается круг от реляционного описания 4-мерных пространственно-временных отношений через переход к бинарным геометриям минимальных рангов, их комплексификации и наконец возвращение назад к унарной 4-мерной геометрии в 2+2-расщепленном виде.

В Приложении обсужден гипотетический вопрос: Каковы были бы классические пространственно-временные отношения, если бы они раскрылись, исходя не из БСКО минимального невырожденного ранга (3,3), а на основе обобщенной предгеометрии, описываемой БСКО более высого ранга (4,4), т. е. исходя из бинарного многомерия. Доказано, что в этом случае мы жили бы в 9-мерном финслеровом многообразии, где квадратичное мероопределение заменено на кубичное.

Глава 1

Классические пространственно-временные отношения

- Евклидова геометрия как система отношений
- Основные понятия пространственно-временных отношений
- $(1+3)$-расщепление пространства-времени
- Координата времени произвольного события
- Система отношений в пространстве скоростей
- Связь двух видов систем отношений
- Выводы и замечания

Первая глава посвящена начальному этапу реализации намеченной программы: реляционной формулировке классической 4-мерной геометрии Минковского, в рамках которой описывается физическое пространство-время специальной теории относительности. Подчеркнем, что становление специальной теории относительности происходило в русле именно реляционного подхода. Даже создавая общую теорию относительности, Эйнштейн, вслед за Махом, мыслил в духе этого же реляционного подхода, чему имеется множество письменных свидетельств.

1.1. Евклидова геометрия как система отношений

Отношение в геометрии – это не что иное, как *метрика (расстояния)*. Однако в современном изложении геометрии, как правило, исходят из координатной системы в многообразиях той или иной размерности, а затем через разности координат двух точек задаются расстояния (метрика). Но возможен и другой ход рассуждений: можно начинать с расстояний, – парных отношений между точками, – а затем уже из них получать координаты и все другие понятия. Упоминание о таком подходе к геометрии имеется у Э. Маха: «Интересную попытку обосновать евклидову и неевклидову геометрию на одном понятии расстояния мы находим у Ж. Де Тилли (1880)» [21, с. 380]. О самом Махе А. Эйнштейн писал: «Мах был единственным, кто серьезно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками» (Цит. по [15, с. 42]). Элементы реляционного подхода к геометрии прослеживаются также в работах Ф. Клейна (1849–1925). Значительно позднее в этом же духе была написана книга К. М. Блюменталя «Теория и применение геометрии расстояний» (1953) [2].

1.1.1. Система отношений, соответствующая евклидовой геометрии

1. С некоторыми фрагментами переформулировки геометрии в терминах расстояний встречается каждый школьник. Известно определение площади треугольника через половину про-

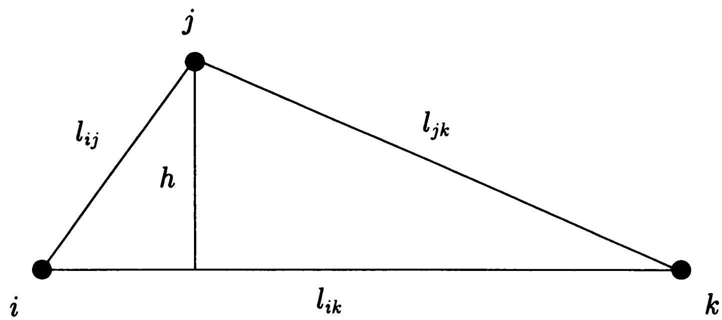


Рис. 1.1. Площадь треугольника можно определить через половину произведения основания на высоту, а можно и иначе – через значения его сторон

изведения основания на высоту. Но можно определить его площадь исключительно через расстояния (отношения) между его вершинами. Пусть его вершины обозначаются буквами i, j, k, а расстояния между ними (длины сторон) есть l_{ik}, l_{ij}, l_{jk}. Тогда квадрат площади треугольника S^2_{ijk} находится по формуле Герона

$$S^2_{ijk} = \frac{1}{16}(l_{ik} + l_{ij} + l_{kj})(l_{ik} + l_{ij} - l_{kj})(l_{ik} - l_{ij} + l_{kj})(-l_{ik} + l_{ij} + l_{kj}). \tag{1.1.1}$$

2. Полученное выражение можно переписать с помощью *определителя Кэли–Менгера для трех точек (вершин треугольника),*

$$16S^2_{ikj} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2_{ik} & l^2_{ij} \\ 1 & l^2_{ki} & 0 & l^2_{kj} \\ 1 & l^2_{ji} & l^2_{jk} & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Отметим, что определители играют чрезвычайно важную роль в реляционной формулировке не только пространственно-временных отношений, но и всей физики. Более того, они важны при изложении многих вопросов чистой математики. В связи с этим Феликс Клейн писал: «Кэли сказал как-то в разговоре со мною, что в случае, если бы ему пришлось прочесть пятнадцать лекций по всей математике, то одну лекцию он посвятил бы определителям» [16, с. 199].

Очевидно, что обращение в нуль определителя (1.1.2) означает, что три точки лежат на одной прямой.

3. Аналогичным образом через определитель Кэли–Менгера на четырех точках находится квадрат 3-мерного объема

$$288V_{ikjn}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{ij}^2 & l_{in}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{kj}^2 & l_{kn}^2 \\ 1 & l_{ji}^2 & l_{jk}^2 & 0 & l_{jn}^2 \\ 1 & l_{ni}^2 & l_{nk}^2 & l_{nj}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.1.3}$$

Выписанные формулы для площадей и 3-мерных объемов можно обобщить на объемы большей размерности в многомерных евклидовых пространствах.

4. Выписанные выше определители можно использовать для задания признака принадлежности элементов геометрии той или иной размерности. Очевидно, что обращение в нуль определителя (1.1.3) означает, что четыре рассматриваемые точки лежат в одной плоскости.

Аналогично можно утверждать, что в 3-мерном евклидовом пространстве определитель Кэли–Менгера для квадратов расстояний между 5 произвольными точками: i, k, m, n, p, тождественно обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 & l_{in}^2 & l_{ip}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{km}^2 & l_{kn}^2 & l_{kp}^2 \\ 1 & l_{mi}^2 & l_{mk}^2 & 0 & l_{mn}^2 & l_{mp}^2 \\ 1 & l_{ni}^2 & l_{nk}^2 & l_{nm}^2 & 0 & l_{np}^2 \\ 1 & l_{pi}^2 & l_{pk}^2 & l_{pm}^2 & l_{pn}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{1.1.4}$$

что означает равенство нулю 4-мерного объема симплекса, образованного этими точками.

5. Отметим, что на это характерное для 3-мерной евклидовой геометрии обстоятельство обращали внимание многие геометры и физики в связи с обсуждением фундаментальных вопросов современной физики.

Так, в книге А. Эйнштейна «Сущность теории относительности», в частности, говорится следующее: «Для наших целей необходимо связать основные понятия геометрии с объектами природы: без такой связи геометрия не имеет для физика никакой цены. Физика интересует вопрос, верны теоремы геометрии или нет? То, что евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые выводы, полученные из определений логическим путем, видно из следующего простого рассуждения.

Между n точками пространства существуют $n(n-1)/2$ расстояний l_{ik}, и $3n$ координат связаны соотношениями

$$l_{ik}^2 = \left(x_i^1 - x_k^1\right)^2 + \left(x_i^2 - x_k^2\right)^2 + \dots .$$

Из этих $n(n-1)/2$ соотношений можно исключить $3n$ координат, и тогда для l_{ik} останется, по крайней мере, $n(n-1)/2-3n$ соотношений. Поскольку l_{ik} — измеримые величины и по определению не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами l_{ik} не являются необходимыми априори» [36, с. 10].

В широко известной книге Дж. Синга «Общая теория относительности» был выписан определитель (1.1.4) и через его значение предлагалось определять наличие кривизны 3-мерного пространства: «Если мы подставим в этот определитель измеренные оптические расстояния, то он не будет равен нулю, и его величина будет мерой тех кривизн, которые мы стараемся найти» [29, с. 344]. Естественно, если он равен нулю, то 3-мерное пространство является плоским.

С. Вейнберг в своей работе «Гравитация и космология» также обращает внимание на определитель Кэли–Менгера, построенный на четырех точках (1.1.3). Предлагалось с его помощью определять наличие кривизны земной поверхности.

1.1.2. Представление геометрических понятий через миноры

1. Через расстояния между точками можно ввести привычные *пространственные координаты* геометрических точек. Для этого сначала нужно определить три *эталонные точки* a, b и c, задающие используемую систему координат. Положим, что точка a лежит в начале координат, положение оси x^1 определим вдоль вектора $\vec{ab}$, а ось x^2 зададим так, чтобы точка c лежала в плоскости (x^1x^2). Тогда задача нахождения пространственных координат произвольной точки i' в 3-мерном пространстве по ее расстояниям до эталонных точек не представляет труда даже для школьника старших классов.

2. Чтобы записать ответ в наиболее компактном виде, введем *обобщенный определитель Кэли–Менгера*, который записывается для двух подмножеств элементов $i, k, m, \ldots$ и $a, b, c, \ldots$, содержащих одинаковые количества элементов, которые могут совпадать, как при записи обычного определителя Кэли–Менгера, а могут и различаться. В самом общем случае такие определители имеют вид

$$D_{ikm\ldots;abc\ldots} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & a_{ia} & a_{ib} & a_{ic} & \ldots \\ 1 & a_{ka} & a_{kb} & a_{kc} & \ldots \\ 1 & a_{ma} & a_{mb} & a_{mc} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}. \tag{1.1.5}$$

3. Опуская все промежуточные выкладки, выпишем координаты точки i' через обобщенные определители Кэли–Менгера:

$$\begin{aligned} x_i^1 &= \frac{D_{ai';ab}}{\sqrt{-2D_a D_{ab}}}; \\ x_i^2 &= -\frac{D_{abi';abc}}{\sqrt{-2D_{ab}D_{abc}}}; \\ x_i^3 &= \frac{D_{abci';abcd}}{\sqrt{-2D_{abc}D_{abcd}}}, \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

где в первой формуле использовано обозначение определителя

$$D_a \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

для придания симметрии всей совокупности формул.

4. Легко убедиться, что соотношение (1.1.4) тождественно выполняется, если парные отношение l_{ik}^2 (расстояния) выразить через найденные описанным образом декартовы координаты

$$l_{ik}^2 = \left(x_i^1 - x_k^1\right)^2 + \left(x_i^2 - x_k^2\right)^2 + \left(x_i^3 - x_k^3\right)^2. \tag{1.1.7}$$

Это известное выражение квадрата длины через квадраты разностей координат.

Отметим, что соотношение (1.1.4) будет выполняться также в псевдоевклидовой геометрии с метрикой вида:

$$\tilde{l}_{ik}^2 = \left(x_i^1 - x_k^1\right)^2 + \left(x_i^2 - x_k^2\right)^2 - \left(x_i^3 - x_k^3\right)^2. \tag{1.1.8}$$

5. Приведём еще формулу для квадрата 3-мерного объема (1.1.4) через декартовы координаты 4 точек:

$$D_{ikjn} = 288V_{ikjn}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{ij}^2 & l_{in}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{kj}^2 & l_{kn}^2 \\ 1 & l_{ji}^2 & l_{jk}^2 & 0 & l_{jn}^2 \\ 1 & l_{ni}^2 & l_{nk}^2 & l_{nj}^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i^1 & x_k^1 & x_j^1 & x_n^1 \\ x_i^2 & x_k^2 & x_j^2 & x_n^2 \\ x_i^3 & x_k^3 & x_j^3 & x_n^3 \end{vmatrix}^2, \tag{1.1.9}$$

где x_i^s, x_k^s, x_j^s, x_n^s — координаты четырех выбранных точек ($s = 1, 2, 3$).

6. Через обобщенные определители Кэли–Менгера записывается ряд других геометрических выражений, например, углы между двумя лучами, исходящими из одной точки, значения двугранных и телесных углов и т. д. Таким образом, всю евклидову (и псевдоевклидову) геометрию можно переписать через расстояния.

7. Изменяя набор эталонных точек a, b, c в 3-мерном пространстве, получим новые значения декартовых координат точки i, а также значения координат другой произвольной точки k. При этом, однако, квадрат расстояния $l_{ik}^2 = a_{ik}$ не изменится. Все возможные изменения эталонных элементов в рамках выделенного пространственного сечения генерируют группу координатных преобразований в 3-мерном пространстве, оставляющую инвариантной квадратичную форму $l_{ik}^2 = \text{const}$.

1.2. Основные понятия пространственно-временных отношений

В специальной и общей теориях относительности в качестве отношений вместо расстояний выступают **интервалы** s_{ik} между парами событий i и k. Как известно, квадрат интервала, являясь характеристикой категории пространственно-временных отношений, определяется разностью квадратов промежутков времени и расстояний между парами событий. Отдельно понятия расстояния и времени имеют условный характер, выделяемый из первичного понятия интервала. С другой стороны, *в понятии интервала между событиями неявно подразумевается категория частиц, с которыми произошли рассматриваемые события. Без материальных объектов (частиц) становятся бессмысленными понятия интервалов и вообще пространственно-временные отношения.*

Введем ключевые понятия теории пространственно-временных отношений.

1. Мировая матрица пространственно-временных отношений. Если опираться на идею абсолютного пространства и времени, то сам факт нахождения объектов в них уже означает наличие их упорядоченности и задание отношений между ними. Если же отказаться от априорных пространства и времени, принять реляционный подход к их природе, то необходимо вместо них вводить глобальную систему отношений между всеми объектами мира, что и делалось сторонниками реляционного подхода, начиная с Лейбница. Следует сразу же подчеркнуть, что этот подход содержит в себе значительно больше возможностей, нежели использование простой абстракции абсолютного пространства-времени.

Отказ от априорного задания пространства-времени в триалистической или теоретико-полевой парадигмах означает задание совокупности отношений (интервалов) между всеми парами событий, что можно представить в виде гигантской **мировой матрицы**

$$M_{world} = \left(\begin{array}{c|cccccccccc}
 & a & b & c & \ldots & i & j & k & l & m & \ldots \\
\hline
a & s^2_{aa} & s^2_{ab} & s^2_{ac} & \ldots & s^2_{ai} & s^2_{aj} & s^2_{ak} & s^2_{al} & s^2_{am} & \ldots \\
b & s^2_{ba} & s^2_{bb} & s^2_{bc} & \ldots & s^2_{bi} & s^2_{bj} & s^2_{bk} & s^2_{bl} & s^2_{bm} & \ldots \\
c & s^2_{ca} & s^2_{cb} & s^2_{cc} & \ldots & s^2_{ci} & s^2_{cj} & s^2_{ck} & s^2_{cl} & s^2_{cm} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
i & s^2_{ia} & s^2_{ib} & s^2_{ic} & \ldots & s^2_{ii} & s^2_{ij} & s^2_{ik} & s^2_{il} & s^2_{im} & \ldots \\
j & s^2_{ja} & s^2_{jb} & s^2_{jc} & \ldots & s^2_{ji} & s^2_{jj} & s^2_{jk} & s^2_{jl} & s^2_{jm} & \ldots \\
k & s^2_{ka} & s^2_{kb} & s^2_{kc} & \ldots & s^2_{ki} & s^2_{kj} & s^2_{kk} & s^2_{kl} & s^2_{km} & \ldots \\
l & s^2_{la} & s^2_{lb} & s^2_{lc} & \ldots & s^2_{li} & s^2_{lj} & s^2_{lk} & s^2_{ll} & s^2_{lm} & \ldots \\
m & s^2_{ma} & s^2_{mb} & s^2_{mc} & \ldots & s^2_{mi} & s^2_{mj} & s^2_{mk} & s^2_{ml} & s^2_{mm} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right). \tag{1.2.1}$$

Здесь по горизонтали и вертикали обозначены события, а элементами матрицы являются квадраты интервалов.

Очевидно, что события невозможны без участвующих в них материальных объектов. В этом смысле можно сказать, что каждая частица (тело или объект) проявляются во время событий через отношения с окружающим миром. Это в полной мере согласуется с позицией Лейбница и Маха.

2. Закон пространственно-временных отношений. Счастливым обстоятельством мирового устройства явилось то, что для элементов мира, — событий, — имеют место симметрии, позволяющие иметь дело не со всей гигантской матрицей, а с геометрией[1], в которой парные отношения между конечным числом произвольных элементов (событий) связаны неким общим соотношением (законом). Это свойство отношений между событиями нетрудно разглядеть в уже изложенной выше реляционной формулировке евклидовой геометрии. Здесь имеется в виду свойство набора расстояний между 5 точками (1.1.4), означающее принадлежность их 3-мерному (плоскому) пространству.

Для 4-мерных пространственно-временных отношений соотношение (1.1.4) обобщается на случай уже 6 точек-событий. Выберем произвольные точки-события i, k, a, b, c, d, тогда квадраты интервалов между ними удовлетворяют условию

$$\Phi_{(6)} \equiv D_{ikabcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & s_{ia}^2 & s_{ib}^2 & s_{ic}^2 & s_{id}^2 \\ 1 & s_{ki}^2 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bi}^2 & s_{bk}^2 & s_{ba}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ci}^2 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{di}^2 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.2.2)$$

означающему, что 5-мерный объем образованного ими симплекса равен нулю.

Назовем это соотношение **законом классических пространственно-временных отношений** и будем его рассматривать в качестве первого ключевого постулата, характеризующего реляционный подход к геометрии (физике).

---

[1] К геометрическим отношениям должны быть добавлены и другие отношения, которые в физике описываются как взаимодействия между всеми объектами мира.

На основе закона (1.2.2), т. е. из элементов и миноров определителя Кэли–Менгера строится вся теория пространственно-временных отношений.

3. **Фундаментальной симметрией** пространственно-временных отношений назовем свойство любых 6 точек-событий удовлетворять закону (1.2.2). В реляционном подходе фундаментальная симметрия заменяет общепринятые симметрии пространства-времени Минковского, описываемые 10-параметрической группой Пуанкаре.

4. **Базис пространственно-временных отношений** задается 4 эталонными точками-событиями, относительно которых можно определить координаты всех других точек-событий. Для избранного базиса из четырех элементов парные отношения полагаются раз навсегда заданными. Базис системы отношений соответствует понятию тела отсчета в теории относительности.

Четверку координат точек-событий можно понимать как функцию парных отношений этого события относительно 4 точек-событий базиса. В этом легко убедиться, рассматривая закон (1.2.2) как уравнение для парного отношения s_{ik}^2, полагая при этом остальные 4 элемента a, b, c, d эталонными. Тогда выделенное парное отношение будет являться функцией 4 парных отношений элемента i относительно 4 базисных элементов, 4 парных отношений элемента k относительно базиса и раз навсегда заданных парных отношений между базисными элементами. Таким образом, понятия координат не вводятся, а определяются из закона системы отношений. Как и в случае 3-мерного евклидова пространства их можно выразить через миноры определителя Кэли–Менгера в законе (1.2.2).

Переходы между системами отсчета, выражаемые в стандартной теории относительности преобразованиями Лоренца, в реляционном подходе соответствуют **переходам от одного базиса к другому**, т. е. к иному набору эталонных элементов.

5. Рангом закона (1.2.2) назовем число элементов $r = 6$, для которых он записывается. Согласно изложенному, ранг r закона систем отношений связан с общепринятым в геометрии понятием размерности n соотношением

$$n = r - 2 \;\rightarrow\; 4 = 6 - 2. \tag{1.2.3}$$

6. Парные отношения в законе (1.2.2) можно представить в каноническом базисе через параметры (декартовы координаты) точек-событий следующим образом

$$s_{ik}^2 = \left(x_i^0 - x_k^0\right)^2 - \sum_{l=1}^{3}\left(x_i^l - x_k^l\right)^2 \equiv \tau_{ik}^2 - l_{ik}^2. \tag{1.2.4}$$

Очевидно, закон (1.2.2) выполняется тождественно при подстановке в него (1.2.4).

7. Сигнатура. Отметим, что закон (1.2.2) не позволяет однозначно фиксировать сигнатуру 4-мерного многообразия. Допускаются сигнатуры: $(++++)$, $(+---)$, $(++--)$ и эквивалентные сигнатуры с заменой знаков плюс на минусы и наоборот. Следовательно, необходимы дополнительные аксиомы, выделяющие сигнатуру $(+---)$. Эти аксиомы соответствуют блоку аксиом частичной упорядоченности, которые часто задают раньше метрических аксиом. Последние согласовываются с упорядоченностью событий. Времени-подобные события имеют $s^2 > 0$, а пространственно-подобные характеризуются $s^2 < 0$. Точки-события с равным нулю интервалом принадлежат изотропному конусу данного базиса.

8. Можно было бы продолжить изложение теории пространственно-временных отношений в сугубо реляционном подходе. Однако ограничимся выводом, который имеет принципиально важное значение для дальнейшего изложения: *все геометрические понятия пространственно-временных отношений мо-*

гут быть выражены через миноры из определителя Кэли–Менгера в законе (1.2.2).

1.3. (1+3)-расщепление пространства-времени

1. С помощью миноров определителя Кэли–Менгера из (1.2.2) и разделения точек-событий на пространственно- и времени-подобные можно выделить **3-мерные пространственно-подобные сечения** и тем самым определить *системы отсчета* наблюдателей.

Пусть с наблюдателем произошло событие a. Тогда пространственное сечение, содержащее событие a и соответствующее его инерциальной системе отсчета, определяется заданием, кроме a, еще трех (эталонных) пространственно-подобных к a и друг к другу точек-событий: b, c, d, для которых соответствующий минор (определитель Кэли–Менгера на четырех точках-событиях) отличен от нуля:

$$D_{abcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{ba}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.3.1)$$

Выделенные четыре точки-события a, b, c, d следует назвать одновременными в системе отсчета так определенного наблюдателя. Для них квадрат интервала можно заменить на квадрат расстояния $s_{ab}^2 \to -l_{ab}^2$.

2. Заданному пространственному сечению принадлежат все точки-события k, пространственно-подобные к выделенным четырем точкам-событиям, для которых определитель Кэли–Менгера (максимальный минор или **фундаментальное 5×5-отношение** в законе (1.2.2)) равен нулю:

$$D_{kabcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bk}^2 & s_{ba}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ka}^2 & l_{kb}^2 & l_{kc}^2 & l_{kd}^2 \\ 1 & l_{ak}^2 & 0 & l_{ab}^2 & l_{ac}^2 & l_{ad}^2 \\ 1 & l_{bk}^2 & l_{ba}^2 & 0 & l_{bc}^2 & l_{bd}^2 \\ 1 & l_{ck}^2 & l_{ca}^2 & l_{cb}^2 & 0 & l_{cd}^2 \\ 1 & l_{dk}^2 & l_{da}^2 & l_{db}^2 & l_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.3.2}$$

Таким условием выделяется 3-мерная евклидова геометрия.

При рассмотрении геометрических понятий в рамках 3-мерного пространственного сечения избранной системы отсчета можно забыть про времени-подобную координату и работать лишь с 3-мерными понятиями.

3. Зная пространственное сечение системы отсчета избранного наблюдателя, определим точки-события на мировой линии этого наблюдателя, т. е. события с одинаковыми пространственными координатами. Для этого построим точки, образующие временное направление, ортогональное заданному пространственному сечению. Пусть нас интересует времени-подобная мировая линия наблюдателя, проходящая через точку-событие a, принадлежащую выделенному пространственному сечению. Выберем в пространственном сечении три точки-события b, c, d, не лежащие в одной плоскости с a. Легко убедиться, что необходимым и достаточным условием того, что точка i лежит на прямой, ортогональной сечению и пересекающей его в точке a, является выполнение условий:

$$s_{ib}^2 = s_{ia}^2 + s_{ab}^2; \quad s_{ic}^2 = s_{ia}^2 + s_{ac}^2; \quad s_{id}^2 = s_{ia}^2 + s_{ad}^2. \tag{1.3.3}$$

Все точки-события, удовлетворяющие этому условию, лежат на мировой (прямой) линии наблюдателя, проходящей через точку-событие a.

Отметим, что задание системы отсчета путем определения ее 3-мерных пространственно-подобных сечений соответствует методу кинеметрических инвариантов в общей теории относительности. Таким способом вводятся так называемые нормальные системы отсчета (без вращения).

4. Другой, более распространенный способ задания систем отсчета исходит из определения времени-подобных мировых линий наблюдателя. В общей теории относительности он назван методом хронометрических инвариантов. В специальной теории относительности система отсчета одиночного наблюдателя задается лишь одной (прямой) мировой линией. Чтобы это сделать, необходимо выделить две времени-подобные точки-события a и i, лежащие на этой мировой линии. В рамках специальной теории относительности существует лишь одна инерциальная система отсчета, где эти два события произошли в одной точке пространства, т. е. квадрат интервала между этими событиями равен квадрату интервала времени ($s_{ai}^2 = \tau_{ai}^2$). Мировой линии наблюдателя принадлежат все другие точки k, удовлетворяющие условию

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 \\ 1 & s_{ia}^2 & 0 & s_{ik}^2 \\ 1 & s_{ka}^2 & s_{ki}^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \tau_{ai}^2 & \tau_{ak}^2 \\ 1 & \tau_{ia}^2 & 0 & \tau_{ik}^2 \\ 1 & \tau_{ka}^2 & \tau_{ki}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.3.4)$$

Далее в этом способе задания системы отсчета определим 3-мерное пространственное сечение, ортогональное определенной мировой линии наблюдателя и проходящее через выделенную точку, например a. Аналогичным образом подбираются три пространственно-подобные a точки-события b, c, d, не лежащие на линии и удовлетворяющие условиям ортогональности (1.3.3). Далее с помощью определителя Кэли–Менгера на 5 точках выделяются все другие точки-события из пространственно-подобного сечения, пересекающего заданную мировую линию в точке a.

1.4. Координата времени произвольного события

1. Определим времени-подобную координату произвольной точки i через ее отношения (интервалы) к четырем эталонным точкам. Поскольку эти эталонные точки одновременны по определению, т. е. $x^0_a = x^0_b = x^0_c = x^0_d \equiv x^0$, то для 6 квадратов интервалов между ними имеем

$$\begin{aligned} s^2_{ab} &= -l^2_{ab}; \quad s^2_{ac} = -l^2_{ac}; \quad s^2_{ad} = -l^2_{ad}; \\ s^2_{bc} &= -l^2_{bc}; \quad s^2_{bd} = -l^2_{bd}; \quad s^2_{cd} = -l^2_{cd}, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

а квадраты интервалов между событием i и эталонными точками имеют вид

$$\begin{aligned} s^2_{ia} &= \tau^2 - l^2_{ia}; \quad s^2_{ib} = \tau^2 - l^2_{ib}; \\ s^2_{ic} &= \tau^2 - l^2_{ic}; \quad s^2_{id} = \tau^2 - l^2_{id}, \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

где $\tau = x^0_i - x^0$ (см. рис. 1.2).

2. Пусть i' – проекция точки i на 3-мерное пространственное сечение, тогда для пяти точек i', a, b, c, d соответствующий определитель Кэли–Менгера обращается в нуль:

$$D_{i'abcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \tau^2 - s^2_{ia} & \tau^2 - s^2_{ib} & \tau^2 - s^2_{ic} & \tau^2 - s^2_{id} \\ 1 & \tau^2 - s^2_{ai} & 0 & l^2_{ab} & l^2_{ac} & l^2_{ad} \\ 1 & \tau^2 - s^2_{bi} & l^2_{ba} & 0 & l^2_{bc} & l^2_{bd} \\ 1 & \tau^2 - s^2_{ci} & l^2_{ca} & l^2_{cb} & 0 & l^2_{cd} \\ 1 & \tau^2 - s^2_{di} & l^2_{da} & l^2_{db} & l^2_{dc} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.3}$$

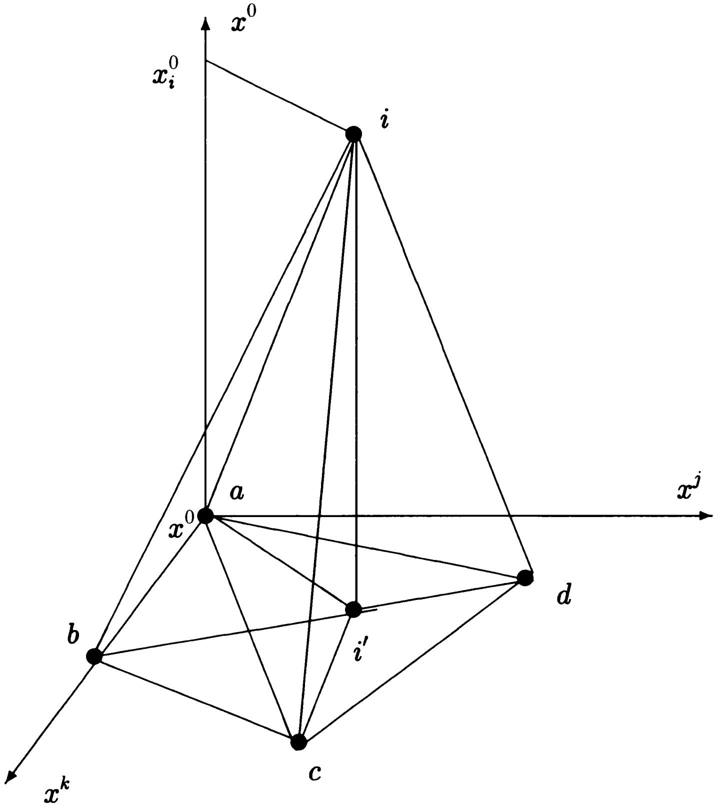


Рис. 1.2. Определение четырех координат произвольного события i через интервалы

Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной τ^2. Расписывая определитель, получаем уравнение

$$D_{iabcd} + 2\tau^2 D_{abcd} = 0, \tag{1.4.4}$$

где D_{iabcd} – определитель Кэли–Менгера, составленный из квадратов интервалов между пятью точками i, a, b, c, d, а D_{abcd} – определитель Кэли–Менгера для четырех эталонных точек.

Решением уравнения является

$$\tau^2 = -\frac{D_{iabcd}}{2D_{abcd}} \to x_i^0 = x^0 + \sqrt{\frac{-D_{iabcd}}{2D_{abcd}}}. \qquad (1.4.5)$$

Используя (1.1.6), из (1.4.2) легко найти l_{ia}^2, l_{ib}^2, l_{ic}^2, l_{id}^2, т. е. квадраты расстояний от проекции i' до четырех эталонных точек.

3. Для нахождения трех пространственных координат x_i^1, x_i^2, x_i^3 следует воспользоваться ранее записанными формулами для 3-мерной евклидовой геометрии.

1.5. Система отношений в пространстве скоростей

До сих пор здесь рассматривались лишь пространственно-временные отношения, однако в физике материальные объекты характеризуются не только положениями относительно друг друга, но и своими скоростями. Этот факт отражается в часто используемом понятии *«расслоенное пространство»*, что означает различение *«базы»* и *«слоя»* над этой базой. При этом в качестве базы выступают пространственно-временные отношения, а слою соответствуют скорости. Иными словами, в данном случае мы имеем дело с отношениями в пространстве скоростей.

В теории относительности скорости частиц являются 4-мерными векторами u^μ, нормированными на единицу

$$u^\mu_{(i)} u_{\mu(i)} = u^0_{(i)} u^0_{(i)} - u^1_{(i)} u^1_{(i)} - u^2_{(i)} u^2_{(i)} - u^3_{(i)} u^3_{(i)} = 1. \qquad (1.5.1)$$

Из факта 4-мерности векторов следует, что любые пять векторов являются линейно зависимыми. Это отображается тем, что определитель Грама, построенный на скалярных произведениях данных векторов, обращается в нуль. С учетом нормированности этих векторов это означает

$$\begin{vmatrix} 1 & u_{\mu(i)}u^{\mu}_{(k)} & u_{\mu(i)}u^{\mu}_{(j)} & u_{\mu(i)}u^{\mu}_{(l)} & u_{\mu(i)}u^{\mu}_{(r)} \\ u_{\mu(k)}u^{\mu}_{(i)} & 1 & u_{\mu(k)}u^{\mu}_{(j)} & u_{\mu(k)}u^{\mu}_{(l)} & u_{\mu(k)}u^{\mu}_{(r)} \\ u_{\mu(j)}u^{\mu}_{(i)} & u_{\mu(j)}u^{\mu}_{(k)} & 1 & u_{\mu(j)}u^{\mu}_{(l)} & u_{\mu(j)}u^{\mu}_{(r)} \\ u_{\mu(l)}u^{\mu}_{(i)} & u_{\mu(l)}u^{\mu}_{(k)} & u_{\mu(l)}u^{\mu}_{(j)} & 1 & u_{\mu(l)}u^{\mu}_{(r)} \\ u_{\mu(r)}u^{\mu}_{(i)} & u_{\mu(r)}u^{\mu}_{(k)} & u_{\mu(r)}u^{\mu}_{(j)} & u_{\mu(r)}u^{\mu}_{(l)} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.5.2)$$

где скалярные произведения имеют вид

$$u_{\mu(i)}u^{\mu}_{(k)} = \overset{0}{u}_{(i)}\overset{0}{u}_{(k)} - \overset{1}{u}_{(i)}\overset{1}{u}_{(k)} - \overset{2}{u}_{(i)}\overset{2}{u}_{(k)} - \overset{3}{u}_{(i)}\overset{3}{u}_{(k)}. \quad (1.5.3)$$

По аналогии с терминологией, введенной для пространственно-временных отношений, будем считать скалярное произведение (1.5.3) *парным отношением* между двумя элементами (4-скоростями), а выражение (1.5.2) — *законом в пространстве скоростей*. Очевидно, что этот закон выполняется для любых 5 скоростей, т. е. опять имеет место *фундаментальная симметрия*, но теперь уже в пространстве скоростей. Исходя из выше изложенного, следует считать, что данный закон имеет ранг $r = 5$, что соответствует геометрической размерности $n = 5 - 2 = 3$. Учитывая данную сигнатуру, находим, что в пространстве скоростей имеет место геометрия Лобачевского, поскольку в ней все векторы снесенные в одну точку, лежат на 3-мерном гиперболоиде.

Отметим тот факт, что закон (1.5.2) в общем случае может соответствовать разным сигнатурам, т. е. его запись не фиксирует конкретную сигнатуру, которая вводится из дополнительных соображений. Так, в случае расслоенного пространства-времени этим условием является совпадение сигнатур в базе и в слое.

1.6. Связь двух видов систем отношений

Введенные выше пространственно-временные отношения и отношения в пространстве скоростей характеризуются разными законами и могут рассматриваться как независимые друг от друга. Однако в общепринятом изложении механики скорости рассматриваются как вторичные, т. е. как производные от пространственно-временных отношений.

В связи с этим отметим, что пространственно-временные отношения статичны и сами по себе не задают ни динамики, ни даже кинематики. Последнюю можно ввести как нечто вторичное в виде последовательности пространственных сечений вдоль линии времени той или иной системы отсчета.

Рассмотрим два близких пространственных сечения в некоторой системе отсчета. Пусть они различаются промежутком времени dt. Полагая, что частицы (тела) проявляются через совокупность событий с их участием и что таковые события имеют место на двух выделенных сечениях, определим отношения для пар событий каждой из частиц (см. рис. 1.3).

Пространственные отношения между событиями на соседних гиперплоскостях можно записать через три разности

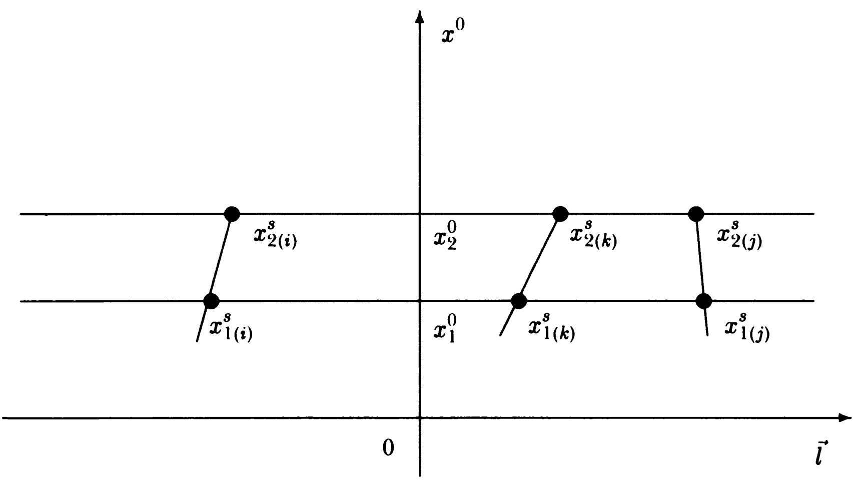


Рис. 1.3. Введение x скоростей через отношения положений частиц на двух близких пространственных сечениях

координат этих событий. Поделив их на промежуток времени между пространственными сечениями, получим компоненты 3-мерных скоростей частиц

$$v^s_{(i)} = \frac{dx^s_{(i)}}{dt}. \tag{1.6.1}$$

Поскольку в 3-мерном пространстве любая четверка векторов является линейно зависимой, то определитель Грама, построенный на четырех векторах, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} v^2_{(i)} & v_{s(i)}v^s_{(k)} & v_{s(i)}v^s_{(j)} & v_{s(i)}v^s_{(l)} \\ v_{s(k)}v^s_{(i)} & v^2_{(k)} & v_{s(k)}v^s_{(j)} & v_{s(k)}v^s_{(l)} \\ v_{s(j)}v^s_{(i)} & v_{s(j)}v^s_{(k)} & v^2_{(j)} & v_{s(j)}v^s_{(l)} \\ v_{s(l)}v^s_{(i)} & v_{s(l)}v^s_{(k)} & v_{s(l)}v^s_{(j)} & v^2_{(l)} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.6.2}$$

где элементами матрицы являются скалярные произведения пар векторов

$$v_{s(i)}v^s_{(k)} = v^1_{(i)}v^1_{(k)} + v^2_{(i)}v^2_{(k)} + v^3_{(i)}v^3_{(k)}. \tag{1.6.3}$$

Эти выражения можно считать парным отношением между скоростями двух частиц или, другими словами, парными отношениями в пространстве 3-мерных скоростей.

Очевидно, что соотношение (1.6.2) тождественно выполняется при парных отношениях вида (1.6.3).

Подчеркнем, что пространственно-временные отношения могут выполняться для любых соотношений положений частиц на соседних гиперплоскостях, поэтому задание системы отношений между скоростями является вторым необходимым фактором при описании поведения частиц.

Вместо нерелятивистского выражения скорости (1.6.1) можно использовать релятивистское выражение, введя времени-подобную координату x^0 и заменив дифференциал времени на дифференциал 4-мерного интервала

$$u^{\mu}_{(i)} = \frac{dx^{\mu}_{(i)}}{ds}. \tag{1.6.4}$$

Описанная здесь процедура опирается, во-первых, на уже заданные пространственные отношения, во-вторых, на выделение двух близких пространственных сечений и, в-третьих, на определение векторов скоростей через смещения и деление на промежуток времени (или интервала). Введенная в предыдущем разделе система отношения в пространстве скоростей заменяет все эти условия.

1.7. Выводы и замечания

Сделаем ряд выводов принципиального характера.

1. Изложенный в этой главе материал фактически представляет собой развитие реляционных взглядов на пространство и время Г. Лейбница и Э. Маха, которые критиковали представления Ньютона об абсолютных пространстве и времени как неких божественных первичных сущностях.

Г. Лейбниц называл идею реальности абсолютного пространства «идолом современных англичан». Суть дискуссии была ярко продемонстрирована в его переписке с С. Кларком, отстаивавшим позиции Ньютона об абсолютных пространстве и времени.

Кун Фишер в своей обстоятельной книге «Лейбниц, его жизнь, сочинения и учение», раскрывая взгляды ученого на мир как всеобщую систему отношений, писал, что «невозможно, чтобы существовала только одна монада (в качестве монады здесь можно понимать частицу или тело. — *Ю. В.*). Если она и существует не благодаря другим, то все же существует вместе с ними, и ее понятие предполагает их бытие; следовательно невозможно мыслить и представить себе только одну монаду без других, связанных с нею, если и не физическим влиянием, то необходимым порядком. Стало быть, невозможно также, чтобы данная вещь представляла только свою индивидуальность, не включая в это представление непосредственно всех остальных индивидумов. Если мы назовем совокупность или порядок вещей миром, то этот индивидум возможен только в этом мире, в этом порядке вещей и не может без него ни существовать, ни быть понятым; поэтому природа каждого существа заключает в себе связь со всеми остальными, стало быть, саму Вселенную. Если, говоря словами Лессинга, в мире ничто не изолировано, то не может быть изолирован ни один индивидум: в таком случае представление этого индивидума есть непосредственно представление *всех*, или каждая монада есть представитель Вселенной: в своей самостоятельности она есть не только мир сам по себе, но, так как она существует в связи со всеми остальными, вместе с тем и этот большой мир в миниатюре, т. е. *микрокосм*, малый мир (petit monde), сконцентрированная Вселенная (univers concentre)» [35].

Выше уже приводились слова Эйнштейна о том, что Эрнст Мах пытался заменить понятие пространства на систему отношений между телами.

2. Отдельно пространственные и отдельно временные отношения, о которых говорили Лейбниц и Мах, можно получить из закона 4-мерных пространственно-временных отношений путем процедуры $1+3$-расщепления, которая основана на выделениях подсистем отношений на 5 событиях (пространство) и на 3 событиях (время).

Все ныне используемые геометрические понятия в пространстве или в пространстве-времени: координаты точек-событий, площади, объемы, углы и т. д., — можно получить через миноры закона пространственно-временных отношений.

3. В своей «Монадологии» Лейбниц наделяет монады дополнительными свойствами, призванными так или иначе обосновать закономерности окружающего мира, динамику и их движение. В частности, таковыми должны являться скорости монад, что здесь отображено заданием второй системы отношений с законом в пространстве скоростей.

В общепринятом изложении понятие скорости и соотношения в пространстве скоростей рассматриваются как вторичные, производные от пространственно-временных отношений, однако, как здесь было показано, эти понятия могут рассматриваться как самостоятельные со своим законом отношений, отличающимся от закона пространственно-временных отношений.

В третьей книге данной серии будет показано, что, по аналогии со свойствами миноров закона пространственно-временных отношений, миноры закона в пространстве скоростей также имеют смысл и играют важную роль в описании физических взаимодействий.

4. Обратим внимание на тот факт, что законы движения частиц (тел) записываются для ускорений. Для того чтобы определить ускорения через пространственно-временные положения частиц необходимо рассматривать не два, а три близких пространственных сечения пространственно-временного многообразия (см. рис. 1.4). Ускорения вводятся через отношения разностей двух соседних значений скоростей на траекториях частиц к разности промежутка времени (интервала) между взятыми сечениями. Это можно наглядно представить как задание значений скоростей материальных объектов на двух близких пространственных гиперплоскостях типа изображенных на рис. 1.3, тогда ускорения характеризуются разностями значений этих скоростей.

В физике (механике) полагается, что ускорения являются функциями от пространственно-временных отношений между

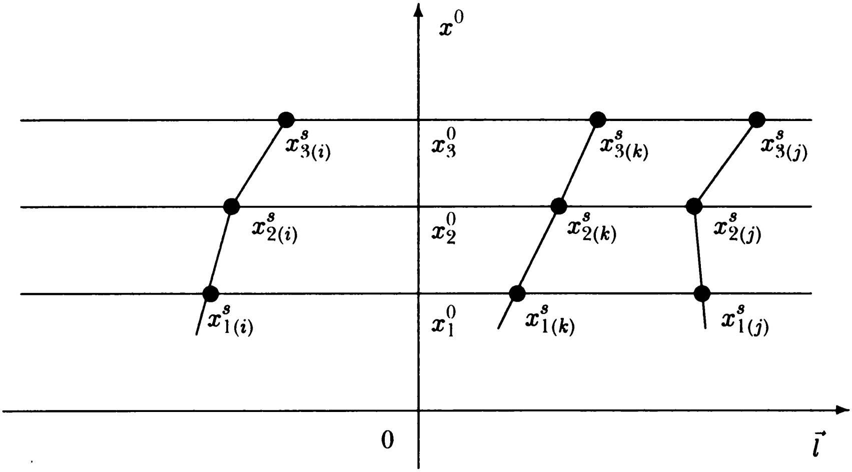


Рис. 1.4. Для введения ускорений необходимо рассмотреть положения частиц (тел) на трех близких пространственных сечениях

частицами и от их скоростей, которые рассматриваются как более первичные понятия.

В принципе, можно ввести отношения между ускорениями различных частиц через их векторные произведения.

5. Преобразования Лоренца, играющие важную роль в теории относительности, можно рассматривать как результат перехода от одного набора (базиса) систем отношений к другому набору.

Глава 2

Унарные системы вещественных отношений

- Постановка задачи
- Виды унарных систем вещественных отношений
- Переход от невырожденных УСВО к вырожденным
- Выводы и замечания

В предыдущей главе было показано, что можно развернуть теорию 3-мерных евклидовых пространственных и 4-мерных пространственно-временных отношений (геометрию Минковского), а также теорию отношений в пространстве скоростей (геометрию Лобачевского), исходя из законов системы отношений в виде равенств нулю определителей Кэли–Менгера или Грама. Все понятия геометрий можно сформулировать через миноры этих определителей. В связи с этим невольно возникает ряд вопросов: Почему отношения, определяющие основу всего нашего классического мира, характеризуются именно этими законами систем отношений? Можно ли както обосновать наличие данных видов законов систем отношений? Имеются ли иные законы систем отношений? Если есть, то каковы они и что они могут означать?

Ответы на эти и ряд других подобных вопросов были даны в работах Ю. И. Кулакова [13, 16], который поставил и в содружестве со своими учениками Г. Г. Михайличенко [23–25] и В. Х. Львом [17–19] дал ответ на еще более глубокий вопрос: каковы вообще существуют геометрии, для которых можно записать некий алгебраический закон?

2.1. Постановка задачи

Задача ставилась следующим образом. Постулировалось существование неких законов в виде равенства нулю некоторой алгебраической функции $\Phi_{(r)}$ от $r(r-1)/2$ вещественных парных отношений a_{ik}:

$$\Phi_{(r)}(a_{ik}, a_{ij}, \ldots, a_{jk}, \ldots) = 0. \tag{2.1.1}$$

Постулировалось также условие фундаментальной симметрии, т. е. выполнимость закона для любой выборки из r элементов рассматриваемого множества. Кроме того, накладывалось дополнительное предположение о непрерывности множества элементов, которое позволяло записать систему функционально-дифференциальных уравнений, из решений которых находились выражения для парных отношений a_{ik} и возможные виды законов $\Phi_{(r)} = 0$. Особое внимание уделялось выявлению всех возможных решений и доказательству отсутствия какихлибо иных их видов. Полученная таким образом совокупность результатов составила математическую часть так называемой теории (унарных) физических структур (на одном множестве элементов).

Теорию физических структур (систем отношений) на одном множестве элементов можно проиллюстрировать с помощью рис. 2.1, где в множестве $\mathcal{M}$ равноправных элементов выделено r элементов, обведенных рамкой, для которых ищется

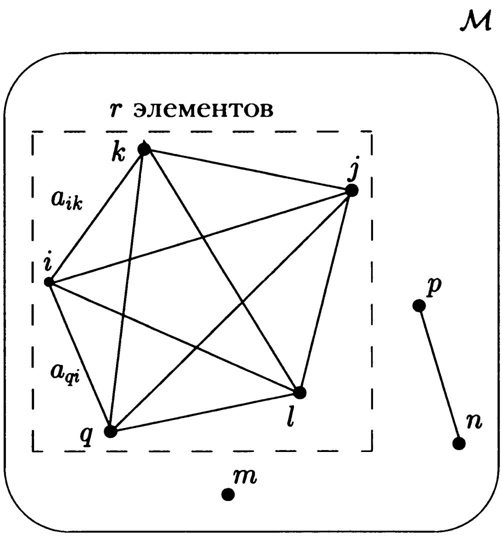


Рис. 2.1. Унарная теория отношений
(теория структур на одном множестве элементов)

закон. Этот набор может быть заменен на любой другой набор из r элементов.

В работах Г. Г. Михайличенко [23–25] и В. Х. Льва [17–19] были найдены все возможные законы (при вещественных парных отношениях) для систем отношений (физических структур на одном множестве элементов) рангов $r = 3, 4, 5$. С увеличением ранга существенно возрастает трудность нахождения законов. Для каждого ранга r имеется несколько решений, которые, как оказалось, соответствуют известным геометриям: Евклида, Лобачевского, Римана (пространств постоянной положительной кривизны) и некоторым другим.

Для унарных систем отношений (геометрий в реляционной форме) по-прежнему выполняется соотношение $n = r - 2$, где r — ранг закона, а n — размерность геометрии. В силе остается и сформулированное выше понятие элементарного базиса (набора эталонных элементов), а также свойство выражаемости координат (параметров) элементов через их отношения к базисным элементам.

Важно отметить, что когда решения функционально-дифференциальных уравнений получены, можно отбросить условия непрерывности и использовать найденные законы для более общих множеств элементов, в том числе и для их дискретных наборов[1].

В предыдущей главе были записаны законы в виде равенства нулю определителей Кэли–Менгера или определителей Грама на 6, 5, 4 и 3 точках (элементах), которые, оказывается, соответствуют частным случаям законов, найденных из решений функционально-дифференциальных уравнений в теории (унарных) физических структур.

2.2. Виды унарных систем вещественных отношений

Не останавливаясь на довольно громоздкой методике решения систем функционально-дифференциальных уравнений, выпишем без доказательств найденные виды законов унарных систем вещественных отношений (УСВО), разбив их на 4 класса. При этом будем исходить из законов ранга (5).

2.2.1. Вырожденные системы вещественных отношений

Класс так называемых **вырожденных структур** (вырожденных УСВО), ранг которых будем обозначать символом $(r; a)$, характеризуется законом в виде равенства нулю определителя (Кэли–Менгера). Так, для ранга $(5; a)$ имеем

[1] Отметим, что при отбрасывании условия непрерывности могут появиться новые решения поставленной задачи.

$$\Phi_{(5;a)}(a_{ik}, a_{im}, \ldots) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & a_{ki} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ 1 & a_{mi} & a_{mk} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & a_{ni} & a_{nk} & a_{nm} & 0 & a_{np} \\ 1 & a_{pi} & a_{pk} & a_{pm} & a_{pn} & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.2.1}$$

где симметричные парные отношения в каноническом виде выглядят следующим образом

$$a_{ik} = \pm\left(x_i^1 - x_k^1\right)^2 \pm \left(x_i^2 - x_k^2\right)^2 \pm \left(x_i^3 - x_k^3\right)^2. \tag{2.2.2}$$

Легко видеть, что рассмотренный выше закон для 3-мерной евклидовой геометрии (1.1.4) или в виде (1.3.2) является именно этим случаем УСВО с сигнатурой $(+++)$. Аналогичное выражение в виде равенства нулю определителя на четырех точках (1.1.3) представляет собой закон УСВО ранга $(4; a)$ для 2-мерной евклидовой геометрии. Равное нулю выражение (1.1.2) является законом УСВО ранга $(3; a)$, описывающим одномерную геометрию.

В работах Ю. И. Кулакова с учениками не была развита теория структур рангов выше 5, однако, очевидно, что существуют УСВО этого типа произвольного ранга. В частности, записанный выше закон (1.2.2) представляет собой именно такой тип УСВО ранга $(6; a)$ с конкретной сигнатурой $(+---)$.

2.2.2. Антисимметричные системы отношений

Второй класс УСВО, ранг которых обозначается символом $(r; b)$, описывается **антисимметричными парными отношениями** $a_{ik} = -a_{ki}$. Для этого случая имеется существенное отличие четных и нечетных рангов.

1. Закон УСВО нечетного ранга $(5;b)$ записывается в виде равенства нулю антисимметричного окаймленного определителя на 5 элементах:

$$\Phi_{(5;b)}(a_{ik}, a_{im}, \ldots) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ -1 & a_{ki} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ -1 & a_{mi} & a_{mk} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ -1 & a_{ni} & a_{nk} & a_{nm} & 0 & a_{np} \\ -1 & a_{pi} & a_{pk} & a_{pm} & a_{pn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.3}$$

Этот закон удовлетворяется для парного отношения

$$a_{ik} = -a_{ki} = \overset{1}{x}_i \overset{2}{x}_k - \overset{1}{x}_k \overset{2}{x}_i + \overset{3}{x}_i - \overset{3}{x}_k, \tag{2.2.4}$$

соответствующего метрике своеобразной 3-мерной симплектической геометрии (геометрии на 3-мерной гиперплоскости, вложенной в 4-мерное симплектическое пространство).

2. Для УСВО этого типа минимального ранга $(3;b)$ закон принимает вид:

$$\Phi_{(3;b)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{ij} \\ -1 & a_{ki} & 0 & a_{kj} \\ -1 & a_{ji} & a_{jk} & 0 \end{vmatrix} = (a_{ik} + a_{kj} + a_{ji})^2 = 0, \tag{2.2.5}$$

где антисимметричные парные отношения представляются через единственные параметры элементов x_i в виде

$$a_{ik} = -a_{ki} = x_i - x_k. \tag{2.2.6}$$

К этому виду систем отношений можно прийти опять исходя из формулы Герона (1.1.1), точнее, исходя из закона для одномерной линии в виде равного нулю определителя (1.1.2), построенного на трех точках. Однако можно ввести направление вдоль линии и тем самым упорядочить точки. Это означает переход от симметричных длин к направленным отрезкам, принимающим положительное значение, если порядок индексов соответствует их направленности, и имеющим отрицательные значения, если индексы стоят в обратном порядке. Так, если принято направление от a к k, то имеем

$$l_{ak} = -l_{ka} > 0.$$

Пусть три точки i, j и k лежат на одной прямой, причем в порядке $i < j < k$, тогда соответствующую скобку в формуле Герона можно записать в виде:

$$p - 2l_{ik} = l_{ij} + l_{jk} + l_{ki} = 0. \tag{2.2.7}$$

Заметим, что две другие скобки $(p - 2l_{jk})$ и $(p - 2l_{ij})$ могли бы соответствовать выполнению условия (2.2.7) при другой упорядоченности точек на линии.

Легко убедиться, что условие (2.2.7) для ориентированной прямой, т. е. для антисимметричных парных отношений l_{ij}, может быть переписано в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & l_{ij} & l_{ik} \\ -1 & l_{ji} & 0 & l_{jk} \\ -1 & l_{ki} & l_{kj} & 0 \end{vmatrix} = (l_{ij} + l_{jk} + l_{ki})^2 = 0, \tag{2.2.8}$$

а это не что иное как закон УСВО ранга $(3; b)$.

3. Закон УСВО четного ранга $(4; b)$ этого класса записывается через неокаймленный определитель

$$\Phi_{(4;b)} = \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.9)$$

Эта УСВО соответствует 2-мерной симплектической геометрии с метрикой (парным отношением):

$$a_{ik} = -a_{ki} = x_i y_k - x_k y_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}. \qquad (2.2.10)$$

2.2.3. Невырожденные системы вещественных отношений

Третий класс, так называемых **невырожденных УСВО** (структур) будем характеризовать рангом (r) без дополнительных букв. Закон УСВО ранга (5) (геометрии) этого класса, записывается в виде равенства нулю неокаймленного определителя из симметричных парных отношений $a_{ik} = a_{ki}$ между 5 элементами (точками):

$$\Phi_{(5)}\,(a_{ik}, a_{im}, \ldots) = \begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ a_{ki} & 1 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ a_{mi} & a_{mk} & 1 & a_{mn} & a_{mp} \\ a_{ni} & a_{nk} & a_{nm} & 1 & a_{np} \\ a_{pi} & a_{pk} & a_{pm} & a_{pn} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.11)$$

Парные отношения a_{ik} этого класса систем отношений представляются в виде

$$a_{ik} = \pm x_i^1 x_k^1 \pm x_i^2 x_k^2 \pm x_i^3 x_k^3 \pm x_i^4 x_k^4, \qquad (2.2.12)$$

где на четверки параметров x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4, характеризующих элементы, наложено условие нормировки на единицу

$$\pm\left(x_i^1\right)^2 \pm \left(x_i^2\right)^2 \pm \left(x_i^3\right)^2 \pm \left(x_i^4\right)^2 = 1. \tag{2.2.13}$$

Данный закон тождественно выполняется для четырех видов парных отношений, отличающихся сигнатурой.

1. Здесь, прежде всего, следует назвать *риманову геометрию* (постоянной положительной кривизны), характеризуемую парными отношениями между точками на 3-мерной гиперсфере:

$$a_{ik} = x_i^1 x_k^1 + x_i^2 x_k^2 + x_i^3 x_k^3 + \\ + \sqrt{\left[1 - \left(x_i^1\right)^2 - \left(x_i^2\right)^2 - \left(x_i^3\right)^2\right]\left[1 - \left(x_k^1\right)^2 - \left(x_k^2\right)^2 - \left(x_k^3\right)^2\right]}. \tag{2.2.14}$$

где x^1, x^2, x^3 по три параметра (координаты), характеризующие элементы (точки).

2. Данным законом описывается также *геометрия Лобачевского* (гиперболическая геометрия постоянной отрицательной кривизны), характеризуемая парными отношениями между точками на 3-мерном гиперболоиде:

$$a_{ik} = -x_i^1 x_k^1 - x_i^2 x_k^2 - x_i^3 x_k^3 + \\ + \sqrt{\left[1 + \left(x_i^1\right)^2 + \left(x_i^2\right)^2 + \left(x_i^3\right)^2\right]\left[1 + \left(x_k^1\right)^2 + \left(x_k^2\right)^2 + \left(x_k^3\right)^2\right]}. \tag{2.2.15}$$

Легко видеть, что это выражение соответствует парному отношению (1.5.3) в пространстве скоростей, если отождествить слагаемые, выписанными в виде квадратных корней, с времени-подобными компонентами x_i^0 и x_k^0 скоростей.

3. Кроме того, имеются еще два решения, соответствующие геометриям на 3-мерных гиперсферах, вложенных в 4-мер

ные псевдоевклидовы пространства:

$$a'_{ik} = x_i^1 x_k^1 + x_i^2 x_k^2 - x_i^3 x_k^3 + \\ + \sqrt{\left[1 - \left(x_i^1\right)^2 - \left(x_i^2\right)^2 + \left(x_i^3\right)^2\right]\left[1 - \left(x_k^1\right)^2 - \left(x_k^2\right)^2 + \left(x_k^3\right)^2\right]}; \tag{2.2.16}$$

$$a''_{ik} = x_i^1 x_k^1 - x_i^2 x_k^2 - x_i^3 x_k^3 + \\ + \sqrt{\left[1 - \left(x_i^1\right)^2 + \left(x_i^2\right)^2 + \left(x_i^3\right)^2\right]\left[1 - \left(x_k^1\right)^2 + \left(x_k^2\right)^2 + \left(x_k^3\right)^2\right]}. \tag{2.2.17}$$

Они соответствуют двум другим выборам сигнатуры.

4. Отметим, что законы невырожденных УСВО допускают конформные преобразования, соответствующие умножению строк и столбцов определителя в законе на вещественные числа, сопоставленные отдельным элементам.

В связи с этим заметим, что введение конформных факторов для всех элементов формально можно трактовать как задание еще одной УСВО минимально возможного ранга (2) с парными отношениями вида

$$a_{ik} = l_i l_k. \tag{2.2.18}$$

Для этой УСВО ранга (2) закон имеет вид (2.2.4) (без нормировки на единицу):

$$\Phi_{(2)} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_i^2 & l_i l_k \\ l_k l_i & l_k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.19}$$

2.2.4. Экзотические системы отношений

Четвертый класс составляют так называемые **экзотические УСВО** ранга $(r; c)$, характеризующиеся законами, которые не представимы в явном виде. Для УСВО ранга $(5; c)$ этого класса были найдены парные отношения в трех видах:

$$a_{ik}^{(1)} = \ln\left(x_i^1 - x_k^1\right)^2 + \frac{x_i^2 - x_k^2 + x_i^3 x_k^1 - x_k^3 x_i^1}{x_i^1 - x_k^1}; \tag{2.2.20}$$

$$a_{ik}^{(2)} = \ln\left[\left(x_i^1 - x_k^1\right)^2 + \left(x_i^2 - x_k^2\right)^2\right] + \gamma \operatorname{arctg}\frac{x_i^2 - x_k^2}{x_i^1 - x_k^1} + x_i^3 + x_k^3; \tag{2.2.21}$$

$$a_{ik}^{(3)} = \ln\left[\left(x_i^1 - x_k^1\right)^2 - \left(x_i^2 - x_k^2\right)^2\right] + \gamma \operatorname{arctg}\frac{x_i^2 - x_k^2}{x_i^1 - x_k^1} + x_i^3 + x_k^3, \tag{2.2.22}$$

где γ — параметр. Они соответствуют неким 3-мерным «экзотическим» геометриям. Сначала полагалось, что эти парные отношения определяют новые, ранее неизвестные (унарные) геометрии, однако впоследствии были обнаружены забытые труды геометров с уже описанными геометриями.

В итоге были найдены десять УСВО (3-мерных геометрий) ранга (5), девять УСВО (2-мерных геометрий) ранга (4) и четыре УСВО (1-мерных геометрий) ранга (3). Для УСВО более высоких рангов ясен вид естественных обобщений указанных геометрий на большие размерности, но не доказана теорема отсутствия иных геометрий.

2.3. Переход от невырожденных УСВО к вырожденным

В предыдущей главе было рассмотрено введение невырожденных систем отношений (в пространстве скоростей), исходя из задания вырожденных систем отношений (пространственно-временных отношений). Рассмотрим обратный переход от невырожденных систем отношений к вырожденным.

Пусть задан закон невырожденных отношений вида (2.2.11) произвольного ранга (r). Опишем переход от него к закону вырожденных отношений (2.2.1) ранга $(r+1;a)$. Чтобы это сделать, нужно осуществить следующие процедуры.

1. Прежде всего, следует снести начала всех векторов в одну точку a. Это означает переименование элементов в формуле (2.2.11): $i \to ai$, $k \to ak$, $m \to am$, … Напомним, что в УСВО ранга (r) отношения задаются между элементами-векторами независимо от их местоположения. Последнее, строго говоря, в этих системах отношений не имеет смысла.

2. Далее нужно перейти от нормированных на единицу векторов к векторам с произвольными длинами. Это означает умножение строк и столбцов в законе (2.2.11) на длины $l_{(ai)}$ соответствующих элементов. Это будет означать переход от закона УСВО ранга (r) к определителю Грама на r векторах

$$\begin{vmatrix} l^2_{(ai)} & x_{s(ai)}x^s_{(ak)} & x_{s(ai)}x^s_{(am)} & x_{s(ai)}x^s_{(an)} & \dots \\ x_{s(ak)}x^s_{(ai)} & l^2_{(ak)} & x_{s(ak)}x^s_{(am)} & x_{s(ak)}x^s_{(an)} & \dots \\ x_{s(am)}x^s_{(ai)} & x_{s(am)}x^s_{(ak)} & l^2_{(am)} & x_{s(am)}x^s_{(an)} & \dots \\ x_{s(an)}x^s_{(ai)} & x_{s(an)}x^s_{(ak)} & x_{s(an)}x^s_{(am)} & l^2_{(an)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.1}$$

3. Кроме того, следует воспользоваться теоремой косинусов, заменяющей скалярные произведения векторов на комбинации квадратов исходных векторов и вектора, соединяющего их концы:

$$x^s_{(ai)}x_{s(ak)} = \frac{1}{2}\left(l^2_{(ai)} + l^2_{(ak)} - l^2_{(ik)}\right). \tag{2.3.2}$$

Напомним, что эту формулу можно получить исходя из треугольника aik, построенного на двух векторах $\vec{ai}$ и $\vec{ak}$, опустив перпендикуляр iM из точки i на основание треугольника ak, и затем записав теорему Пифагора для прямоугольного треугольника Mik.

В результате проделанных процедур выражение (2.3.1) принимает вид

$$\begin{vmatrix} l^2_{(ai)} & \frac{1}{2}\left(l^2_{(ai)}+l^2_{(ak)}-l^2_{(ik)}\right) & \frac{1}{2}\left(l^2_{(ai)}+l^2_{(am)}-l^2_{(im)}\right) & \dots \\ \frac{1}{2}\left(l^2_{(ak)}+l^2_{(ai)}-l^2_{(ik)}\right) & l^2_{(ak)} & \frac{1}{2}\left(l^2_{(ak)}+l^2_{(am)}-l^2_{(km)}\right) & \dots \\ \frac{1}{2}\left(l^2_{(am)}+l^2_{(ai)}-l^2_{(im)}\right) & \frac{1}{2}\left(l^2_{(am)}+l^2_{(ak)}-l^2_{(km)}\right) & l^2_{(am)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.3}$$

4. Произведем тождественное преобразование получившегося определителя, состоящее в увеличении его порядка на единицу. Для этого добавим в определитель новую (первую) строку, в которой первый элемент является единицей, а все остальные элементы равны нулю. Тогда элементы добавленного (первого) столбца, кроме первой единицы, могут быть произвольными. В качестве таковых выберем половины соответствующих диагональных элементов определителя (2.3.3). Подобное преобразование определителя назовем *окаймлением*. Вычитая из второго, третьего и т. д. столбцов первый столбец и умножая строки, начиная со второй, на 2, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ l^2_{(ai)} & l^2_{(ai)} & \left(l^2_{(ak)}-l^2_{(ik)}\right) & \left(l^2_{(am)}-l^2_{(im)}\right) & \dots \\ l^2_{(ak)} & \left(l^2_{(ai)}-l^2_{(ik)}\right) & l^2_{(ak)} & \left(l^2_{(am)}-l^2_{(km)}\right) & \dots \\ l^2_{(am)} & \left(l^2_{(ai)}-l^2_{(im)}\right) & \left(l^2_{(ak)}-l^2_{(km)}\right) & l^2_{(am)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.4}$$

5. Далее произведем второе окаймление, образовав новый (первый) столбец из единицы на первом месте и нулей на всех остальных местах. Построим новую (первую) строку из первой единицы, второго нуля и из соответствующих диагональных элементов определителя в (2.3.4). Далее вычтем из третьей, четвертой и т. д. строк первую строку и, переставляя затем первую и вторую строки, получим равный нулю определитель Кэли–Менгера, построенный на r элементах, что соответствует закону УСВО ранга $(r + 1; a)$, записанному в (2.2.1).

6. Имеется еще один способ перехода от невырожденных систем отношений к вырожденным, который в какой-то степени послужил основанием для термина «вырожденные» системы отношений. Если описанный выше способ приводит к увеличению ранга, то второй связан с понижением ранга на две единицы.

Пусть имеется закон типа (2.2.11) невырожденной УСВО ранга (r) с парными отношениями вида (2.2.12). Выделим два параметра. Пусть таковыми будут параметры с номерами $r-2$ и $r-3$. Постулируем, что для первого элемента в этом парном отношении выделенные параметры принимают «вырожденные» значения:

$$x_{r-3} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{l=r-4} x_l^2; \quad x_{r-2} = 1, \tag{2.3.5}$$

тогда как для второго элемента, наоборот, $x_{r-3} = 1$, а последний параметр принимает первое значение из (2.3.5). В этом случае парные отношения принимают вид (2.2.2), присущий УСВО ранга $(r-2; a)$, а подстановкой этих параметров в соответствующие строки и столбцы закона УСВО ранга (r) путем вычитания строк и столбцов легко получить закон вырожденной УСВО ранга $(r-2; a)$.

2.4. Выводы и замечания

1. Если ограничиться лишь математическими аспектами теории физических структур с вещественными парными отношениями на одном множестве элементов (теории УСВО), то невольно стараешься найти в широко разросшемся дереве современной математики ветви (давно сложившиеся или только побеги), которые бы соответствовали этой теории, предложенной физиками. Насколько автору известно, такой поиск предпринимался Ю. И. Кулаковым. Им высказывался ряд соображений на этот счет, начиная от указаний на связь с теорией категорий и функторов и кончая гипотезой об основании теорией физических структур совершенно новой ветви математики. Не исключено, что к математическому содержанию этой теории можно подойти с разных сторон. В частности, следует отметить несколько попыток построения аксиоматики математического аппарата теории физических структур [16]. Это несомненно может помочь уточнению логических основ теории и прояснению ее связей с другими разделами математики.

Однако следует признать, что *наиболее близким к теории систем отношений разделом современной математики является теория линейных пространств*. При этом сопоставление двух теорий следует начинать не со сравнения их логических основ, а со сличения ряда выводов теории систем отношений и определений скалярных произведений векторов в теории линейных пространств. Тогда приходим к выводу, что элементам невырожденных УСВО рангов (r) соответствуют векторы линейных пространств. Параметры элементов теории систем отношений выступают в качестве компонент векторов, а парные отношения (2.2.12) соответствуют скалярным произведениям векторов в теории $r-1$-мерных линейных пространств:

$$(\vec{x}_i\vec{x}_k) = \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l x_k^l. \qquad (2.4.1)$$

Продолжая сравнение двух теорий, следует напомнить, что в теории линейных пространств широко используются понятие и свойства *определителя Грама.*

Таким образом, на две сравниваемые теории можно смотреть как на описывающие одни и те же закономерности, однако с разных позиций (аксиоматик). То, что в одной теории (линейных пространств) является аксиомой (например, вид скалярного произведения векторов), становится теоремой, т. е. выводится во второй теории (систем отношений). Такая ситуация типична для геометрии, которую можно строить на базе разных систем аксиом. Аналогичное можно усмотреть и в различных формулировках физической теории.

Однако разные точки зрения на одну и ту же совокупность закономерностей могут дать ряд преимуществ при дальнейшем развитии и обобщении теории. На плодотворность множества формулировок в физике в свое время указывал Р. Фейнман.

Сопоставление теорий линейных пространств и систем отношений демонстрирует это еще раз. Так, в теории систем отношений с единой точки зрения охватываются как невырожденные УСВО, так и вырожденные УСВО рангов $(r; a)$, $(r; b)$, характеризуемые законами (2.2.1) и (2.2.3), а также симплектическая и иные виды геометрий. Парные отношения ряда из них в теории линейных пространств выглядят неестественно (представляются искусственными). Как правило, в теории линейных пространств векторы с таким скалярным произведением не рассматриваются. В теории же систем отношений это родственные определения парных отношений.

С позиции теории систем отношений становятся естественными и другие обобщения теории линейных пространств — на случай бинарных систем отношений, которые рассмотрены ниже.

2. Однако здесь нас более всего интересуют физические аспекты теории систем отношений. В теории физических

структур с вещественными отношениями на одном множестве элементов дается логическое обоснование законов классических пространственно-временных отношений и отношений в пространстве скоростей. Более того, в системе наших пространственно-временных представлений оказываются задействованными два из названных видов возможных отношений. Подтип антисимметричных отношений также оказывается задействованным, например, при описании мировой линии наблюдателя. Пока не выявлен лишь физический смысл экзотических физических структур.

Это несомненный шаг в осуществлении программы раскрытия природы пространства-времени и обоснования его свойств. Некоторые физики считают его достаточным для понимания сути пространства-времени, однако, на наш взгляд, этого далеко недостаточно по ряду причин.

Во-первых, в рамках теории УСВО, по всей видимости, нет возможности обосновать 3-мерность пространства и 4-мерность пространства-времени.

В-вторых, в рамках теории УСВО вряд ли возможно обосновать сигнатуру пространственно-временных отношений.

В-третьих, остается не выясненным вопрос о происхождении квадратичного характера мероопределения.

Но самое главное, теория УСВО может претендовать на описание классических отношений между достаточно массивными объектами и не нацелена на решение задачи описания прообраза классической геометрии в микромире. А этот вопрос издавна волнует физиков.

К этому следует добавить, что теория УСВО ничего не говорит о возможности построения макроскопической теории пространственно-временных отношений — проблемы, уже давно поставленной в повестку дня современной фундаментальной теоретической физики.

Глава 3

Бинарные системы вещественных отношений

- Истоки теории бинарных систем отношений
- Принципы бинарной геометрии
- Виды бинарных систем вещественных отношений
- Примеры переходов от бинарных систем вещественных отношений к унарным геометриям
- Следствия открытия бинарных геометрий

Следующий шаг в прояснении природы классических 4-мерных пространственно-временных отношений тесно связан с открытием Ю. И. Кулаковым нового вида геометрий — бинарных, следующих из теории бинарных физических структур, а точнее — из теории бинарных систем вещественных отношений.

Ю. И. Кулаков пришел к бинарным системам отношений (к физическим структурам на двух множествах элементов), исходя из анализа принципов ньютоновой механики и поиска их возможных обобщений [13]. В итоге было обнаружено, что, действуя точно по тем же правилам, как и в теории унарных физических структур (на одном множестве элементов), можно построить содержательную теорию на двух множествах элементов [1].

3.1. Истоки теории бинарных систем отношений

Соображения, приведшие Ю. И. Кулакова к открытию бинарных геометрий, можно усмотреть в работах Э. Маха, написанных на рубеже XIX и XX веков. Будучи сторонником реляционного подхода, Мах утверждал, что в механике определяющую роль играют не массы и силы, а ускорения тел: «Мы видим, что как те массы, которые, согласно обычному выражению, действуют друг на друга, так и те, которые друг на друга не действуют, находятся в совершенно однородных друг к другу отношениях ускорения, и именно можно считать, что все массы находятся в связи друг с другом. То, что в отношениях масс ускорения их играют выдающуюся роль, мы должны принять как факт опыта» [22, с. 200].

Именно эту мысль Маха о ключевом характере ускорения во втором законе Ньютона Кулаков довел до логического завершения, одновременно придав ньютоновой динамике реляционную форму [13, 16]. Для этого он предложил рассматривать два множества элементов: тела (их будем нумеровать латинскими буквами) и все возможные ускорители (силы F_α), ускоряющие тела (их будем нумеровать греческими индексами). Между любым телом i и любым ускорителем α есть отношение, имеющее физический смысл ускорения $a_{i\alpha}$.

[1] Идея построения теории физических структур возникла у Кулакова из анализа уравнений Ньютона даже раньше осознания наличия структур на одном множестве элементов.

Оказывается, общеизвестное выражение **второго закона Ньютона** можно записать в иной, реляционной форме, содержащей лишь отношения между телами и ускорителями. Для этого ограничимся одномерной записью второго закона Ньютона и запишем его для некоторого тела с номером i, ускоряющегося под действием конкретной силы F_α:

$$m_i a_{i\alpha} = F_\alpha. \tag{3.1.1}$$

Выберем две произвольные массы m_i и m_k и две произвольные силы F_α и F_β и запишем 4 уравнения Ньютона для всех комбинаций из этих двух масс и сил:

$$\begin{aligned} m_i a_{i\alpha} &= F_\alpha; \quad m_k a_{k\alpha} = F_\alpha; \\ m_i a_{i\beta} &= F_\beta; \quad m_k a_{k\beta} = F_\beta. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Вычитая в каждой строке одно уравнение из другого, находим

$$m_i a_{i\alpha} - m_k a_{k\alpha} = 0; \quad m_i a_{i\beta} - m_k a_{k\beta} = 0. \tag{3.1.3}$$

Выражая одну из масс, например m_k, и подставляя ее в другое равенство, приходим к искомому выражению:

$$a_{i\alpha} a_{k\beta} - a_{i\beta} a_{k\alpha} = 0 \to \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.4}$$

Полученное соотношение справедливо для любого набора из двух масс m_i и m_k и любого набора из двух ускорителей (сил) F_α и F_β, т. е. обладает своеобразной фундаментальной симметрией. Выражение (3.1.4) представляет собой пример закона простейшей бинарной системы отношений (физической структуры на двух множествах элементов) ранга (2,2).

Можно рассуждать и в обратном порядке, т. е. исходить из закона бинарной системы отношений (3.1.4) и придти ко второму закону Ньютона в общепринятом виде. Для этого следует учесть, что закон (3.1.4) будет тождественно выполняться, если парное отношение $a_{i\alpha}$ представить в виде произведения двух слагаемых:

$$a_{i\alpha} = \psi(i)\phi(\alpha), \tag{3.1.5}$$

где $\psi(i)$ – некоторая характеристика (параметр), сопоставленная с каждым элементом первого множества (телами), а $\phi(\alpha)$ – параметр, сопоставляемый с каждым элементом второго множества (силами). Далее остается только переобозначить эти параметры через привычные величины:

$$\left(\psi(i) \equiv \frac{1}{m_i}; \quad \phi(\alpha) \equiv F_\alpha\right) \to a_{i\alpha} = \frac{F_\alpha}{m_i}, \tag{3.1.6}$$

т. е. исходя из реляционной записи (3.1.4), как первичного закона, приходим к известной форме второго закона Ньютона (3.1.1).

Изложенный здесь подход позволяет пролить свет на суть дискуссии о смысле понятий массы и силы в традиционном подходе к классической механике. В данном подходе массы и силы имеют характер лишь параметров (своеобразных координат) элементов двух множеств. Этот факт показывает, что *обобщенная категория пространственно-временных отношений, характеристикой которой является ускорение, действительно объединяет (содержит в себе) две исходные категории: частиц (их характеристиками являются массы) и категории полей (их характеристиками являются силы).*

3.2. Принципы бинарной геометрии

Открытые Кулаковым физические структуры на двух множествах элементов будем называть *бинарными системами вещественных отношений (БСВО).* Представим основные положения теории БСВО в наиболее общем виде.

1. Постулируется, что имеется не одно, как в случае унарных систем отношений, а два множества элементов. Обозначив первое множество символом $\mathcal{M}$, а второе – $\mathcal{N}$, будем различать элементы первого множества латинскими буквами $(i, j, k, \ldots)$, а элементы второго множества – греческими $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

2. Между любой парой элементов из разных множеств задается парное отношение – некоторое вещественное (или в дальнейшем комплексное) число $u_{i\alpha}$ (см. рис. 3.1).

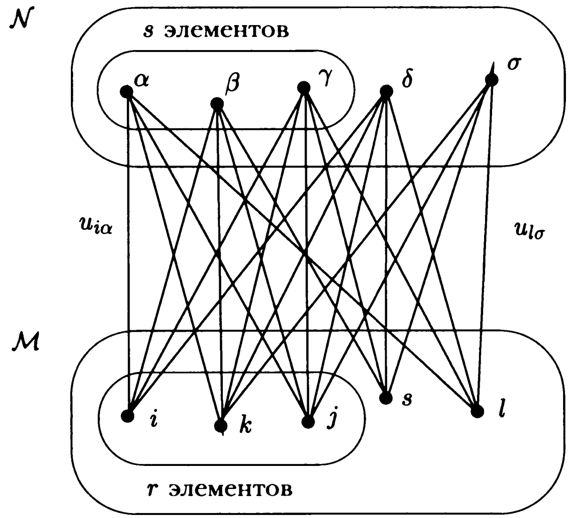


Рис. 3.1. Бинарная система отношений (структура) ранга (r, s)

3. Как и в случае унарных структур (систем отношений), полагается, что имеется некий *алгебраический закон*, связывающий все возможные отношения между любыми r элементами множества $\mathcal{M}$ и s элементами множества $\mathcal{N}$:

$$\Phi_{(r,s)}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \ldots, u_{k\gamma}) = 0. \qquad (3.2.1)$$

Целые числа r и s характеризуют ранг (r, s) бинарной структуры (системы отношений). Очевидно, что функция $\Phi_{(r,s)}$ в (3.2.1) теперь зависит от $r \times s$ аргументов.

4. Опять, как и в случае унарных систем отношений, используется *принцип фундаментальной симметрии*, т. е. полагается, что закон (3.2.1) будет справедлив при замене элементов $i, j, \ldots$ и $\alpha, \beta, \ldots$ на любые другие элементы соответствующих множеств.

5. Если предположить, что *два множества элементов являются непрерывными*, то наличие фундаментальной симметрии позволяет записать функционально-дифференциальные уравнения и из них найти вид как парных отношений $u_{i\alpha}$, так и саму функцию $\Phi_{(r,s)}(u_{i\alpha}, \ldots)$.

Заметим, что опять, после того как закон найден, можно отказаться от условия непрерывности и рассматривать дискретные множества элементов.

В построенной на этих принципах теории возникают аналоги понятий координат в геометрии или компонент векторов, которые имеют тот же характер, что и в теории унарных систем отношений. Чтобы к ним прийти, в законе (3.2.1) нужно считать $r - 1$ элементов множества M и $s - 1$ элементов множества N *эталонными*. Тогда на этот закон можно смотреть как на соотношение, определяющее парное отношение между двумя оставшимися неэталонными элементами (пусть это будут элементы i и α) через их отношения к эталонным элементам. Отношения же между самими эталонными элементами можно считать раз и навсегда заданными. Тогда оказывается, что парное отношение $u_{i\alpha}$ характеризуется $s - 1$ параметрами (координатами) элемента i (его отношениями к $s - 1$ эталонным элементам множества N) и $r - 1$ параметрами элемента α.

6. Оказалось, что законы бинарных систем отношений записываются в виде равенств нулю определителей из парных

отношений. Опять, как и в случае унарных систем отношений, в построении теории и ее интерпретации ключевую роль играют миноры определителя, через который записан закон бинарной системы отношений.

7. Существенно подчеркнуть, что развиваемая таким образом теория опирается исключительно на систему собственных понятий, т. е. не нуждается в привлечении посторонних факторов, например, классических пространственно-временных представлений.

3.3. Виды бинарных систем вещественных отношений

В конце 1960-х годов Ю. И. Кулаковым была поставлена задача поиска всех возможных бинарных структур (БСВО), исходя из найденного им простейшего примера — БСВО ранга (2.2). Для случая *вещественных отношений* эта задача в самом общем виде была решена его учеником Г. Г. Михайличенко (см. [23]). Отвлекаясь от всех математических деталей, сосредоточим наше внимание на полученных результатах. Как выяснилось, существуют бинарные системы вещественных отношений (БСВО) не всех мыслимых рангов (r, s), а только трех типов рангов, изображенных на рис. 3.2, где по вертикальной оси отложены значения s, а по горизонтальной оси — r. Как видно из рисунка, существуют следующие БСВО:

1) на главной диагонали БСВО симметричных рангов (r, r), где $r \geqslant 2$;
2) на двух побочных диагоналях БСВО рангов $(r \pm 1, r)$;
3) Исключительная БСВО ранга (4,2) и эквивалентная ей БСВО ранга $(2, 4)$.

Г. Г. Михайличенко нашел все возможные виды законов для систем отношений названных рангов. Подчеркнем, что,

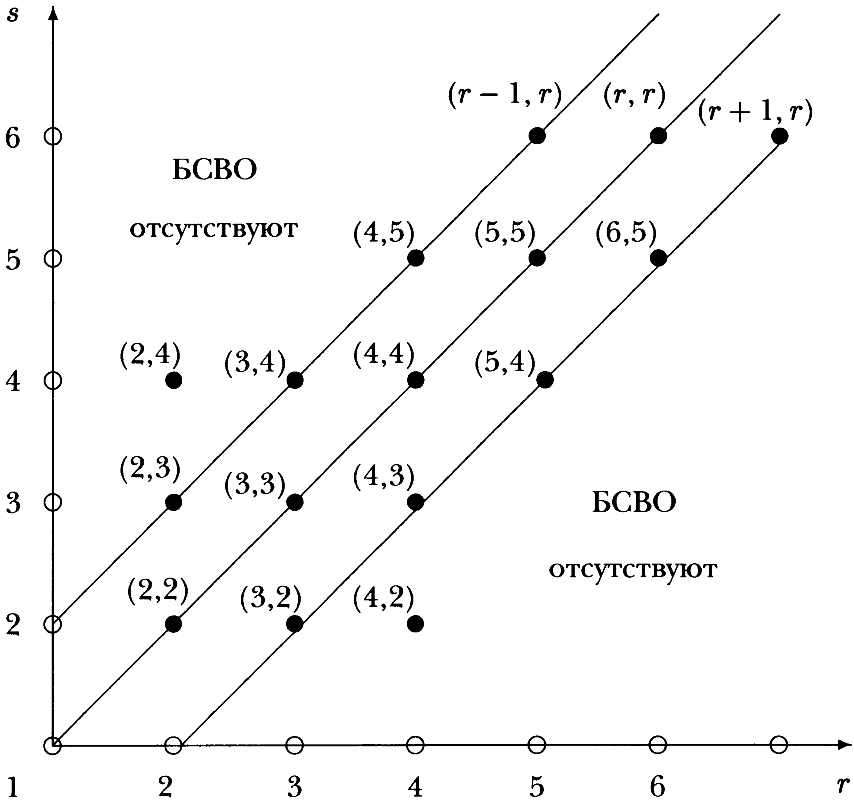


Рис. 3.2. Существующие бинарные системы вещественных отношений

в отличие от случая унарных структур, для бинарных систем отношений эта задача решается в общем виде.

3.3.1. Диагональные бинарные системы отношений

Для **систем отношений симметричных рангов** (r, r) имеется два и только два вида решений: невырожденное и вырожденное.

1. Для *невырожденного вида* закон представляется в виде

$$\Phi_{(r,r)}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \ldots) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \ldots & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \ldots & u_{k\gamma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & \ldots & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.3.1}$$

где парное отношение представляется в форме

$$u_{ik} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l. \tag{3.3.2}$$

Здесь $i^1, i^2, \ldots, i^{r-1}$ — $r-1$ параметров элемента i, а $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{r-1}$ — $r-1$ параметров элемента α. Этот случай можно считать общим; оставим для него прежнее обозначение ранга (r, r).

2. *Второе решение вырожденного вида* соответствует закону

$$\tilde{\Phi}_{(r,r:a)}(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \ldots & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \ldots & a_{k\gamma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \ldots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.3.3}$$

где парное отношение a_{ik} представляется в форме

$$a_{ik} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + i^{r-1} + \alpha^{r-1}. \tag{3.3.4}$$

Здесь опять присутствуют по $r-1$ параметров каждого из двух элементов, однако по одному из параметров оказываются выделенными. Для этого случая ранг будем обозначать символом $(r, r; a)$.

В работах В. Х. Льва, ученика Ю. И. Кулакова, было показано, что бинарные системы отношений ранга $(r, r; a)$ можно понимать как своего рода *вырожденные* бинарные системы отношений более высокого ранга.

3.3.2. Недиагональные бинарные системы отношений

1. Для **БСВО, изображенных на побочных диагоналях**, законы найдены в видах: для ранга $(r+1, r)$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{k\gamma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \dots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.3.5)$$

с парным отношением

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l + \alpha_0; \qquad (3.3.6)$$

для ранга $(r-1, r)$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{k\gamma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \dots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.3.7)$$

с парным отношением

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + i_0. \qquad (3.3.8)$$

Характерно, что для того типа элементов, которых в законе меньше, число параметров на единицу больше, причем дополнительный параметр входит в парное отношение аддитивным образом.

2. Заметим, что формально можно ввести БСВО минимальных рангов (2,1) и (1,2). Для них приведенные выше законы означают

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} \\ 1 & a_{k\alpha} \end{vmatrix} = a_{k\alpha} - a_{i\alpha} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} \end{vmatrix} = a_{i\beta} - a_{i\alpha} = 0, \tag{3.3.9}$$

т. е. в первом случае отношение любого элемента множества $\mathcal{M}$ к произвольному элементу α множества $\mathcal{N}$ определяется одним единственным параметром элемента $\alpha : a_{i\alpha} = a_{k\alpha} = \ldots = = a_{j\alpha} = \alpha_0$, а во втором случае, наоборот, отношение любого элемента множества $\mathcal{N}$ к произвольному элементу i множества $\mathcal{M}$ определяется одним единственным параметром элемента $i : a_{i\alpha} = a_{i\beta} = \ldots = a_{i\gamma} = i_0$.

3. Для **исключительных БСВО рангов (4,2) и (2,4)** законы найдены соответственно в видах:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & (a_{i\alpha}a_{i\beta}) \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & (a_{k\alpha}a_{k\beta}) \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & (a_{j\alpha}a_{j\beta}) \\ 1 & a_{s\alpha} & a_{s\beta} & (a_{s\alpha}a_{s\beta}) \end{vmatrix} = 0; \tag{3.3.10}$$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ (a_{i\alpha}a_{k\alpha}) & (a_{i\beta}a_{k\beta}) & (a_{i\gamma}a_{k\gamma}) & (a_{i\delta}a_{k\delta}) \end{vmatrix} = 0, \tag{3.3.11}$$

где парные отношения для БСВО ранга (4,2) определяются формулой

$$a_{i\alpha} = \frac{i\alpha^1 + \alpha^2}{i + \alpha^3}; \tag{3.3.12}$$

а для БСВО ранга (2,4) – формулой

$$a_{i\alpha} = \frac{\alpha i^1 + i^2}{\alpha + i^3}. \tag{3.3.13}$$

Здесь те элементы, которых в законе меньше, характеризуются тремя параметрами, а те, которых больше, – только одним параметром. БСВО этого ранга, оказывается, соответствует проективной геометрии.

3.4. Примеры переходов от бинарных систем вещественных отношений к унарным геометриям

Унарные системы отношений можно получить из бинарных систем отношений специальной «склейкой» элементов из двух множеств в новые элементы уже одного множества, причем отношения между ними строятся из первичных бинарных отношений. Имеется ряд вариантов переходов от бинарных систем отношений к унарным. Приведем несколько примеров таких переходов, причем ограничимся рассмотрением лишь диагональных БСВО и УСВО с симметричными парными отношениями. Учитывая схожесть видов парных отношений и законов бинарных и унарных систем отношений, отдельно рассмотрим переходы от невырожденных БСВО ранга (r, r) к невырожденным УСВО ранга (r) и от выроденных БСВО ранга $(r, r; a)$ к УСВО ранга $(r; a)$. Поскольку элементы БСВО ранга (r, r) характеризуются $r - 1$ параметром, а элементы УСВО ранга r характеризуются $r - 2$ параметрами, то необходимо ввести *дополнительное условие*, сокращающее число независимых параметров.

3.4.1. Невырожденные системы отношений

Начнем с переходов от диагональных невырожденных БСВО ранга (r, r) к УСВО ранга (r). Будем сшивать в один новый элемент такие элементы БСВО, параметры которых связаны соотношениями:

$$i^l = \pm\alpha^l; \quad k^l = \pm\beta^l; \quad j^l = \pm\gamma^l; \quad \ldots . \tag{3.4.1}$$

Новые элементы УСВО будем обозначать латинскими индексами элементов БСВО из множества $\mathcal{M}$.

Определим парные отношения a_{ik} между новыми элементами через перекрестные отношения между сшиваемыми элементами БСВО следующим образом

$$a_{ik} = a_{ki} \simeq u_{i\beta} = u_{k\alpha} = \pm \sum_{l=1}^{r-1} i^l\beta^l. \tag{3.4.2}$$

Однако нетрудно заметить, что из этих парных отношений можно составить равный нулю определитель Грама, поскольку в общем случае его диагональные элементы отличны от единицы. Чтобы получить закон соответствующей УСВО ранга (r), необходимо диагональные элементы нормировать на единицу. Это можно сделать следующим образом. Пусть параметры с номером $r-1$ входят в (3.4.2) со знаком плюс. Выразим их через оставшиеся $r-2$ уже независимые параметры вида

$$\begin{aligned}
i^l &= \pm\alpha^l \equiv x_i^l;\\
k^l &= \pm\beta^l \equiv x_k^l; \quad \ldots \quad \text{при} \quad l = 1, 2, \ldots, r-2;\\
i^{r-1} &= \alpha^{r-1} = \sqrt{1 \mp \left(x_i^1\right)^2 \mp \ldots \mp \left(x_i^{r-2}\right)^2};\\
k^{r-1} &= \beta^{r-1} = \sqrt{1 \mp \left(x_k^1\right)^2 \mp \ldots \mp \left(x_k^{r-2}\right)^2}; \quad \ldots .
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

При этом парные отношения между разными новыми элементами принимают вид

$$a_{ik} = \pm x_i^1 x_k^1 \pm x_i^2 x_k^2 \pm \ldots +$$
$$+ \sqrt{\left[1 \mp \left(x_i^1\right)^2 \mp \ldots \mp \left(x_i^{r-2}\right)^2\right]\left[1 \mp \left(x_k^1\right)^2 \mp \ldots \mp \left(x_k^{r-2}\right)^2\right]}, \tag{3.4.4}$$

соответствующий формулам (2.2.14)–(2.2.17). Очевидно, что определитель из так заданных парных отношений обращается в нуль и означает закон (2.2.11) УСВО ранга (r).

Очевидно, что нормировка на единицу означает дополнительное условие, сокращающее число параметров элементов УСВО до $r-2$.

3.4.2. Вырожденные системы отношений

Вырожденные УСВО ранга $(r; a)$ (с симметричными парными отношениями) получаются из вырожденных БСВО ранга $(r, r; a)$. В этом случае следует выбрать дополнительное условие в виде равенства нулю внутренних парных отношений:

$$(a_{i\alpha}) = (a_{k\beta}) = \ldots = 0 \to a_{ii} = a_{kk} = \ldots = 0, \tag{3.4.5}$$

причем следует положить, что это обусловлено специальным видом выделенных (аддитивных) параметров. Условия сшивки записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} i^l &= \mp\alpha^l = \sqrt{2}x_i^l; \quad k^l = \mp\beta^l = \sqrt{2}x_k^l; \\ i_0 &= \alpha_0 = \pm\left(x_i^1\right)^2 \ldots \pm \left(x_i^{r-2}\right)^2; \\ k_0 &= \beta_0 = \pm\left(x_k^1\right)^2 \ldots \pm \left(x_k^{r-2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

В этом случае парные отношения между сшитыми парами определяются в виде

$$a_{ik} = a_{i\beta} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \beta^l + i_0 + \beta_0 = \sum_{l=1}^{r-2} g_{ll}\left(x_i^l - x_k^l\right)^2 = l_{ik}^2, \qquad (3.4.7)$$

где $g_{ll} = \pm 1$ — диагональные элементы метрического тензора евклидова или псевдоевклидова пространства с соответствующей сигнатурой. Очевидно, что закон (3.3.3) БСВО ранга $(r, r; a)$ непосредственно приводит к закону УСВО вида (2.2.1).

Аналогичным образом можно перейти от законов БСКО к законам других УСВО (см. [6]), причем, как правило, имеется ряд вариантов перехода. Таким образом, описанные в предыдущей главе УСВО (геометрии) можно понимать как вторичные, образованные из более первичных БСВО.

3.5. Следствия открытия бинарных геометрий

Открытие бинарных систем отношений приводит к ряду далеко идущих следствий, важных для построения реляционного миропонимания. Назовем главные из них.

1. Теория бинарных систем отношений строится по образу и подобию теории унарных систем отношений, соответствующих, как это было показано, общепринятым геометриям. Следовательно, найденные в группе Кулакова бинарные физические структуры (бинарные системы отношений) можно трактовать как новый класс *бинарных геометрий*, в которых можно ввести аналоги многих известных геометрических понятий, например, объемов, площадей и т. д.

2. Теория бинарных систем отношений, как и унарных, не опирается на понятия классической геометрии и физики, имеющих субстанциальный характер. Теории систем отношений являются последовательными реляционными конструкциями, формулируемыми на основе собственного набора понятий и закономерностей.

Основы теории физических структур, сформулированные Ю. И. Кулаковым в 1968 году, были опубликованы [13] и одобрены академиком И. Е. Таммом, его научным руководителем во время обучения в аспирантуре физфака МГУ. В 1970 году Тамм, ознакомившись с работой своего бывшего аспиранта, писал: «В рамках теории физических структур по-новому осмысливается проблема единства мира, — у современных ученых еще силен искус решения этой проблемы в субстанциалистическом духе. Однако, не исчерпал ли себя этот подход? С точки зрения теории физических структур более перспективно искать не исходную „первоматерию“, а исходные „первоструктуры“, — такая переформулировка проблемы единства мира представляется нам несравненно более преимущественной и в логическом, и в естественно-научном отношении. <...> Так сама идея структурно-синтетического построения теории физических структур возникает как естественная антитеза к доминирующему в мышлении многих ученых субстанциально-аналитическому подходу» [15, с. II].

Известно, что И. Е. Тамм в свое время поддерживал развитие реляционного подхода к физике в работах Я. И. Френкеля. В данном же случае он одобрил работы в этом же направлении Ю. И. Кулакова, написав: «Теория физических структур безупречна в эстетическом отношении, — это не внешний лоск, а тонкое свидетельство глубины и истинности построений».

3. Бинарные системы отношений были найдены, исходя из анализа второго закона Ньютона и были названы физическими, поскольку Кулаков стремился на их основе описать не только геометрию, но и физические закономерности, причем в самом широком смысле.

Вот как сам Кулаков писал об этой своей идее: «Обращая внимание на факт существования определенной связи между взаимными расстояниями, относящимися к достаточно большому числу точек, и отдавая себе отчет о принципиальном значении этого соотношения для понимания глубокой связи, существующей между евклидовой геометрией и реальным миром, можно сделать следующий шаг и в качестве исходной идеи считать, *что существование подобных соотношений является свойством не только совокупностей материальных точек, но и многих других физических систем.*

Более того, именно этот факт, являющийся основным для теории физических структур, следует признать наиболее фундаментальным физическим законом, лежащим в основании любой последовательной физической теории феноменологического типа, ибо он является как раз тем самым первым звеном, которое соединяет эмпирические свойства реальных физических объектов с абстрактными физическими понятиями и через них с эффективными математическими методами.

Таким образом, в этих соотношениях особенно отчетливо проявляется нечто общее и фундаментальное, присущее всем физическим законам феноменологического типа. Это „нечто“ и есть физическая структура, т. е. особый тип отношений, в которых находятся, независимо от их конкретной природы, все физические объекты» [15, с. 64–65].

Очевидно, что вытекающая из этой позиции программа означает построение реляционной теории геометрии и всей физики.

4. В исследованиях группы Кулакова было доказано, что *отсутствуют нетривиальные содержательные теории тернарных, тетрадных и т. д. систем вещественных отношений.* Следовательно, природа ограничилась случаями бинарных и унарных систем отношений, причем теория бинарных систем отношений оказалась значительно проще теории унарных структур.

Следовательно, есть все основания полагать, что *бинарные системы отношений описывают более глубокие основы мироздания, нежели общепринятые (унарные) геометрии.*

5. Из бинарных геометрий можно построить общепринятые унарные геометрии путем своеобразной склейки элементов двух множеств. В связи с этим следует напомнить, что в теориях геометрического миропонимания ставится задача геометризации основных понятий физики и разработки объединенных моделей физических взаимодействий на основе обычной, т. е. унарной геометрии. В теоретико-полевом подходе физика также строится на фоне унарной геометрии. Однако, поскольку открыты более элементарные бинарные геометрические конструкции, то закономерно возникает мысль *положить в основу программы геометризации физики именно бинарные системы отношений.* Так и предлагается делать в бинарной геометрофизике.

6. Однако существенным недостатком программы, развиваемой в группе Кулакова являлось то, что, во-первых, рассматривались лишь задачи классической физики, далекие от актуальных проблем современной физики микромира, и, во-вторых, авторы этой теории ограничивались лишь случаем вещественных парных отношений, тогда как в физике микромира самым существенным образом используются комплексные величины. Эти недостатки устраняются в развиваемой нами бинарной геометрофизике.

Глава 4

Предгеометрия

- Принципы бинарной геометрофизики
- Бинарная система комплексных отношений ранга (3,3)
- Алгебра 2-компонентных спиноров
- Переход от предгеометрии к геометрии Лобачевского
- Выводы и замечания

Нет нужды доказывать, что так или иначе возникшие математические методы и даже разделы математики могут использоваться для исследований в различных областях науки и техники. То же самое можно сказать и про бинарные геометрии. Однако есть веские основания утверждать, что их открытие наиболее важно для исследований прообраза классических пространственно-временных отношений в физике микромира [6–9]. Приведем наиболее существенные из них.

1. Как уже было отмечено, бинарные геометрии можно считать более элементарными, нежели общепринятые унарные геометрии. Последние получаются «склейкой» элементов из двух множеств бинарных геометрий. А поскольку во главу угла данной книги поставлена проблема вывода классических

пространственно-временных представлений из неких более элементарных понятий физики микромира, то данный факт, несомненно, способствует продвижению в заданном направлении.

2. Подчеркнем, что в основание классической геометрии не заложено понятие эволюции системы. Общепринятые геометрические представления и соответствующие ей в реляционном подходе (унарные) пространственно-временные отношения по своей сути статичны: в них отсутствует идея развития. Введение времени-подобной координаты не меняет сути, поскольку это лишь изменяет сигнатуру: квадрат одной из координат (компонент) пишется с обратным знаком. Идея эволюции вводится дополнительным постулатом последовательного рассмотрения состояний системы на 3-мерных пространственно-подобных сечениях вдоль координаты времени.

Бинарные геометрии позволяют устранить этот недостаток, если положить, что одно множество элементов соответствует начальным, а второе множество — конечным состояниям системы. Тогда понятие эволюции оказывается заложенным в самое основание новой геометрии и всей физики. Теперь ключевую роль играет понятие процесса, состоящее в переходе системы из одного состояния (из прошлого) в другое состояние (в будущее). Отношения между элементами двух множеств характеризуют возможные переходы, то есть являются тем третьим, что в метафизике Аристотеля связывает два состояния и тем самым позволяет определить движение.

3. Открытие бинарных геометрий с заданной выше интерпретацией двух множеств и отношений между их элементами позволяет вернуться к идеям, высказанным на заре создания квантовой механики Л. де Бройлем, М. П. Бронштейном и др. Здесь мы имеем в виду сформулированное ими положение, согласно которому для адекватного описания квантовомеханических закономерностей необходимо изменить в микромире классические пространственно-временные представле-

ния. Высказывалась мысль о проявлениях в микромире принципиально новой геометрии. Именно таковой предлагается считать бинарную геометрию с обобщением вещественных парных отношений на комплексные отношения.

4. Еще одним доводом в пользу использования бинарных геометрий для описания закономерностей физики микромира является тот факт, что в основе всего наблюдаемого нами вещества лежат два вида электрически заряженных частиц: положительных (протоны) и отрицательных (электроны). А ведь геометрия строится на основании абстракций из наблюдений вещества: макроскопических тел и поведения света. Нельзя забывать, что подавляющая часть явлений и наблюдений происходит с электромагнитными квантами (фотонами), которые могут излучаться и поглощаться лишь системами, состоящими из заряженных частиц двух типов. Этот фактор необходимо также положить в основу физической картины мира, которую еще предстоит создать.

Имеются и другие свидетельства целесообразности использования бинарных геометрий для описания прообраза классических пространственно-временных отношений в микромире. Все это позволяет назвать теорию, развиваемую на основе обобщенных бинарных геометрий наименьших рангов, предгеометрией.

В этой главе рассматриваются принципиальные вопросы предгеометрии, основанной на бинарных системах комплексных отношений минимального невырожденного ранга (3,3), и выявляются истоки ключевых свойств общепринятой (унарной) геометрии, таких как размерность, сигнатура и некоторые другие.

4.1. Принципы бинарной геометрофизики

Приступая к описанию ключевых положений бинарной геометрии, или, точнее, *бинарной геометрофизики*, следует иметь в виду, что она проявляется не в классической физике, а в физике микромира.

Изложим ключевые принципы бинарной геометрофизики, которые используются не только для описания прообраза классических пространственно-временных отношений, но и при построении реляционной теории физических взаимодействий.

1. Бинарная геометрофизика не нуждается ни в наличии априорно заданного классического пространства-времени, ни в допущении непрерывности множеств элементов.

2. Бинарная геометрофизика строится на двух множествах элементов, соответствующим двум соседним состояниям эволюционирующих систем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Реляционное описание элементарного звена процесса означает задание гигантской **мировой матрицы**, обобщающей унарные мировые матрицы (2.2.1):

$$M_{world} = \left(\begin{array}{c|cccccccccc}
 & \mu & \nu & \rho & \dots & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \sigma & \dots \\
\hline
a & u_{a\mu} & u_{a\nu} & u_{a\rho} & \dots & u_{a\alpha} & u_{a\beta} & u_{a\gamma} & u_{a\delta} & u_{a\sigma} & \dots \\
b & u_{b\mu} & u_{b\nu} & u_{b\rho} & \dots & u_{b\alpha} & u_{b\beta} & u_{b\gamma} & u_{b\delta} & u_{b\sigma} & \dots \\
c & u_{c\mu} & u_{c\nu} & u_{c\rho} & \dots & u_{c\alpha} & u_{c\beta} & u_{c\gamma} & u_{c\delta} & u_{c\sigma} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
i & u_{i\mu} & u_{i\nu} & u_{i\rho} & \dots & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\sigma} & \dots \\
j & u_{j\mu} & u_{j\nu} & u_{j\rho} & \dots & u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\sigma} & \dots \\
k & u_{k\mu} & u_{k\nu} & u_{k\rho} & \dots & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\sigma} & \dots \\
l & u_{l\mu} & u_{l\nu} & u_{l\rho} & \dots & u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\delta} & u_{l\sigma} & \dots \\
m & u_{m\mu} & u_{m\nu} & u_{m\rho} & \dots & u_{m\alpha} & u_{m\beta} & u_{m\gamma} & u_{m\delta} & u_{m\sigma} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right), \tag{4.1.1}$$

где $u_{i\alpha}$ — **парные отношения**, заданные лишь для пар элементов из двух разных множеств.

3. Построение прообраза пространственно-временных отношений в физике микромира требует обобщения вещественных парных отношений на случай комплексных чисел, поскольку в микромире теряет смысл аксиома Архимеда, определяющая понятия больше – меньше. Такие системы отношений будем называть *бинарными системами комплексных отношений (БСКО)*.

4. В бинарной геометрофизике два множества элементов выступают равноправно, что соответствует как симметрии двух знаков электрического заряда, так и обратимости прообраза времени на самом элементарном уровне. Это означает использование лишь бинарных систем отношений симметричных рангов (r, r).

5. Как и в случае унарного описания мира, бинарная мировая матрица обладает нулевым детерминантом, но имеется выделенное число (порядок) – симметричный **ранг** (r, r), начиная с которого и выше, миноры равны нулю.

Равенство нулю миноров данного критического порядка r назовем **законом бинарного мира или бинарных систем комплексных отношений**. В самом общем случае его можно представить в виде (3.3.1):

$$\Phi_{(r,r)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & \dots \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & \dots \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.1.2)$$

Легко убедиться, что этим законам удовлетворяют парные отношения

$$u_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l \qquad (4.1.3)$$

того же вида, что и для вещественных парных отношений в (3.3.2).

6. В бинарной геометрофизике ключевую роль играют миноры максимального порядка в законе БСКО (4.1.2), т. е. в общем случае отличные от нуля определители порядка $(r-1)$. Они являются **фундаментальными** $(r-1)\times(r-1)$**-отношениями** и для них принято специальное обозначение в виде двух этажей из символов двух типов элементов первого и второго множеств, заключенных в квадратные скобки. Можно показать, что в БСКО произвольного ранга (r, r) фундаментальные отношения обладают замечательным свойством:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \dots \\ i & k & \dots \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \dots \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & \dots \\ i^2 & k^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \dots \\ \alpha^2 & \beta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \tag{4.1.4}$$

т. е. записываются через произведение из определителей, составленных из параметров одного сорта.

7. Элементарный базис характеризуется именно фундаментальным $(r-1)\times(r-1)$-отношением. Как и в классической физике, в бинарной геометрофизике используются привилегированные элементарные базисы, т. е. удовлетворяющие специальным условиям. В качестве элементарного базиса выступают элементарные частицы (или атомы), а не макроприборы, как это принято полагать при изложении квантовой механики.

8. В общем случае параметры элементов двух множеств произвольны, однако можно ввести понятие «свободных частиц» и, в согласии с принятым законом преобразования элементов второго множества, постулировать, что для любого элемента i в множестве $\mathcal{M}$ существует сопряженный с ним элемент α в множестве $\mathcal{N}$, связанный с ним условием «сшивки» или *сопряжения по вертикали*:

$$i^s = \overset{*}{\alpha}{}^s; \quad k^s = \overset{*}{\beta}{}^s; \quad j^s = \overset{*}{\gamma}{}^s; \quad \ldots . \tag{4.1.5}$$

Эти условия соответствуют принятым в квантовой теории условиям связи начальных и конечных состояний для свободных (невзаимодействующих) частиц.

9. Следует отметить, что имеются две возможности задания закона преобразований элементов второго множества:

1) можно полагать, что элементы двух множеств преобразуются одинаково;
2) можно постулировать, что элементы второго множества преобразуются через комплексно сопряженные коэффициенты.

Второй из этих способов имеет преимущества, обусловленные тем, что для перехода от комплексных выражений к наблюдаемым величинам рано или поздно приходится их умножать на комплексно сопряженные выражения, что практически оказывается эквивалентным постулату преобразования элементов второго множества через комплексно сопряженные коэффициенты. На основании этого *в бинарной геометрофизике переходы от одного элементарного базиса к другому описываются следующими линейными преобразованиями параметров элементов двух множеств*:

$$i'^s = C^s_r i^r; \quad \alpha'^s = \overset{*}{C}{}^s_r \alpha^r, \tag{4.1.6}$$

где C^s_r и $\overset{*}{C}{}^s_r$ – коэффициенты, определяющие класс используемых бинарных систем отношений (эталонных элементов).

10. Как и в специальной теории относительности, в бинарной геометрофизике выделяется класс линейных преобразований, соответствующий переходам между привилегированными элементарными базисами. Это становится возможным при условии неизменности (инвариантности) каждого из определителей справа в фундаментальном $(r-1) \times (r-1)$

отношении (4.1.4). Легко показать, что такие преобразования принадлежат $2r(r-2)$-параметрической группе $SL(r-1,C)$.

4.2. Бинарная система комплексных отношений ранга (3,3)

Легко понять, что в бинарной геометрофизике ключевую роль играют БСКО минимальных рангов (2,2) и (3,3), на основе которых строится система представлений, названная нами *предгеометрией.* Начнем ее изложение не с теории БСКО минимального ранга (2,2), а с теории БСКО следующего ранга (3,3), поскольку, как будет показано ниже, БСКО ранга (2,2) может рассматриваться как подсистема БСКО более высоких рангов, в том числе, ранга (3,3). Именно роль БСКО ранга (3,3) имеет особое значение в формировании комплекса оснований физики. Из нее непосредственно следует ряд ключевых понятий классической и квантовой физики. Более того, можно утверждать, что данные понятия фактически уже давно используются в теоретической физике. В частности, таковым является понятие спина элементарных частиц и теория 2-компонентных спиноров.

4.2.1. Канонический базис БСКО ранга (3,3)

1. Согласно общей теории бинарных систем отношений, закон БСКО ранга (3,3) имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\mu} & u_{i\nu} \\ u_{m\alpha} & u_{m\mu} & u_{m\nu} \\ u_{n\alpha} & u_{n\mu} & u_{n\nu} \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.2.1)$$

где, согласно (4.1.3), парные отношения можно записать в виде

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2. \qquad (4.2.2)$$

Элементы этой системы отношений характеризуются двумя парами комплексных параметров i^1, i^2, α^1, α^2.

2. Как уже отмечалось, параметры элементов можно выразить через их отношения к некой системе эталонных (базисных) элементов. Пусть базис системы отношений задается двумя элементами m и n множества $\mathcal{M}$ и двумя элементами μ и ν множества $\mathcal{N}$, выполняющими роль базиса, как при задании координатной системы в геометрии, или роль базисных тел, определяющих систему отсчета в теории относительности. Обозначим волной сверху отношения между эталонными элементами: $\tilde{u}_{m\mu}, \tilde{u}_{m\nu}, \tilde{u}_{n\mu}, \tilde{u}_{n\nu}$. Отношение $u_{i\alpha}$ между произвольными неэталонными элементами i и α (см. рис. 4.1) выразим с помощью закона (4.2.1) через парные отношения элементов i и α к эталонным ($u_{i\mu}, u_{i\nu}, u_{m\alpha}, u_{n\alpha}$) и парные отношения между эталонными элементами:

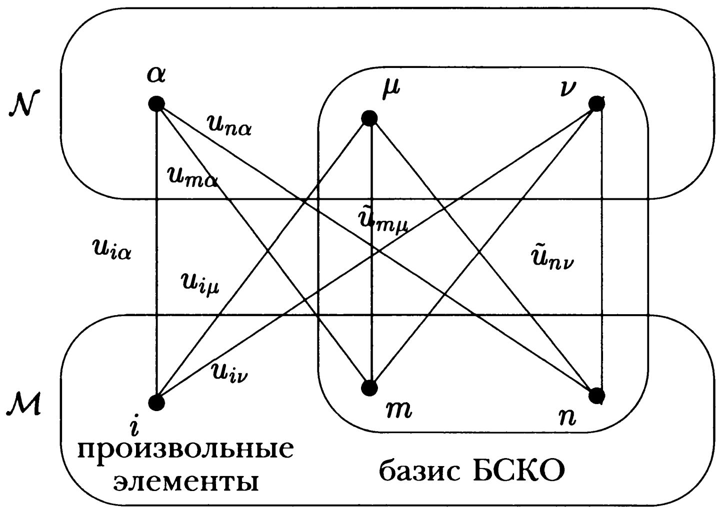


Рис. 4.1. Задание параметров пары элементов i и α через их отношения к эталонным элементам

$$u_{i\alpha} = \frac{1}{\Delta}\left(u_{i\mu}u_{m\alpha}\tilde{u}_{n\nu} + u_{i\nu}u_{n\alpha}\tilde{u}_{m\mu} - u_{i\mu}u_{n\alpha}\tilde{u}_{m\nu} - u_{i\nu}u_{m\alpha}\tilde{u}_{n\mu}\right), \tag{4.2.3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{m\mu} & \tilde{u}_{m\nu} \\ \tilde{u}_{n\mu} & \tilde{u}_{n\nu} \end{vmatrix} = \tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{n\nu} - \tilde{u}_{n\mu}\tilde{u}_{m\nu} \equiv \begin{bmatrix} \mu\nu \\ mn \end{bmatrix} \tag{4.2.4}$$

— *фундаментальное* 2×2-отношение между эталонными элементами.

3. Вид парного отношения (4.2.2) соответствует специальному набору условий на отношения между эталонными элементами:

$$\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}_{n\nu} = u_0; \quad \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}_{m\nu} = 0. \tag{4.2.5}$$

В этом случае

$$\Delta = u_0^2 > 0, \tag{4.2.6}$$

и парное отношение (4.2.3) между двумя произвольными неэталонными элементами в данном базисе принимает наиболее простой вид

$$u_{i\alpha} = \frac{\tilde{u}_{m\mu}}{\Delta}\left(u_{i\mu}u_{m\alpha} + u_{i\nu}u_{n\alpha}\right) \equiv i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2, \tag{4.2.7}$$

где параметры элементов представляются через отношения к базисным элементам:

$$\begin{aligned} i^1 &= \pm\frac{u_{i\mu}}{\sqrt{u_0}}; \quad i^2 = \pm\frac{u_{i\nu}}{\sqrt{u_0}}; \\ \alpha^1 &= \pm\frac{u_{m\alpha}}{\sqrt{u_0}}; \quad \alpha^2 = \pm\frac{u_{n\alpha}}{\sqrt{u_0}}. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Назовем систему эталонных элементов с такими свойствами *каноническим базисом*, а саму БСКО с данным базисом ее *каноническим представлением*.

В рамках одной и той же БСКО ранга (3,3) имеется множество канонических базисов.

4.2.2. Двухкомпонентные спиноры и группы их преобразований

1. Рассмотрим фундаментальное 2×2-отношение между произвольными двумя парами элементов: i, k, α, β. Легко показать, что оно представляется в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}, \tag{4.2.9}$$

т. е. записывается через произведение двух определителей, образованных из параметров элементов отдельных множеств.

Отдельные определители справа можно понимать как антисимметричные метрики в каждом из двух множеств (пространств) БСКО ранга (3,3), например,

$$b(i,k) = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} = i^1k^2 - i^2k^1. \tag{4.2.10}$$

Обратим внимание на тот факт, что в исходных положениях бинарной геометрофизики определены отношения, — прообраз своеобразной метрики, — лишь между элементами двух разных множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ и что не было отношений внутри каждого из множеств. Однако в (4.2.9) фактически возникли антисимметричные метрики внутри каждого из множеств, «наведенные» отношениями с элементами противоположного множества.

2. Рассмотрим такие линейные преобразования параметров элементов в каждом множестве, которые оставляют инвариантными отдельные определители справа в (4.2.9). В частности, для элементов множества $\mathcal{M}$ при произвольных линейных преобразованиях

$$i'^s = C^s_r i^r, \tag{4.2.11}$$

где $s, r = 1, 2$, определитель преобразуется по закону

$$\begin{vmatrix} i'^1 & k'^1 \\ i'^2 & k'^2 \end{vmatrix} = \left(C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2\right) \cdot \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix}. \tag{4.2.12}$$

Следовательно, для инвариантности определителя необходимо, чтобы коэффициенты преобразования удовлетворяли соотношению

$$C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = 1. \tag{4.2.13}$$

Это налагает два условия на 8 вещественных коэффициентов, составляющих C_r^s. Линейные преобразования (4.2.11) с условием (4.2.13) составляют *унимодулярную (6-параметрическую) группу* $SL(2, C)$. Во втором множестве имеют место комплексно сопряженные преобразования, которые также составляют группу $SL(2, C)$.

3. Таким образом, элементы БСКО ранга (3,3), характеризуемые парами комплексных параметров, являются векторами 2-мерного комплексного пространства, в котором определены линейные преобразования (4.2.11), относительно которых остается инвариантной антисимметричная квадратичная форма (4.2.10). Но это не что иное, как общепринятое определение 2-компонентных спиноров. Следовательно, *теория БСКО ранга (3,3) автоматически приводит к понятию 2-компонентных спиноров.*

4. Выделим такой класс линейных преобразований, при которых остаются инвариантными парные отношения:

$$u'_{i\alpha} = i'^1 \alpha'^1 + i'^2 \alpha'^2 = i^1 \alpha^1 + i^2 \alpha^2 = u_{i\alpha} = Inv. \tag{4.2.14}$$

Это требование налагает на коэффициенты C_r^s следующие три комплексных соотношения:

$$\begin{aligned} C_1^1 \overset{*}{C}{}_1^1 + C_1^2 \overset{*}{C}{}_1^2 &= 1; \\ C_2^1 \overset{*}{C}{}_2^1 + C_2^2 \overset{*}{C}{}_2^2 &= 1; \\ C_1^1 \overset{*}{C}{}_2^1 + C_1^2 \overset{*}{C}{}_2^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Это четыре условия на 8 вещественных параметров. Линейные преобразования (4.2.11) с условиями (4.2.15) образуют *унитарную* (4-параметрическую) *группу* $U(2)$ [1].

5. При унитарных преобразованиях $U(2)$ фундаментальные 2×2-отношения остаются инвариантными, однако в общем случае отдельные определители справа не являются инвариантными при этих преобразованиях. Обсудим частный случай унитарных преобразований, при которых коэффициенты удовлетворяют как условиям (4.2.13), так и (4.2.15). Такие преобразования составляют *унимодулярную унитарную (3-параметрическую) группу* $SU(2)$.

Выделяя из третьего из соотношений в (4.2.15) коэффициент

$$C_2^2 = \frac{-\overset{*}{C}{}_1^1 C_2^1}{\overset{*}{C}{}_1^2}$$

и подставляя его в (4.2.13), приходим с учетом первого соотношения из (4.2.15) к условиям на коэффициенты:

$$C_2^1 = -\overset{*}{C}{}_1^2; \quad C_1^1 = \overset{*}{C}{}_2^2. \tag{4.2.16}$$

Представим C_2^1 и C_1^1 через вещественные параметры a_0, a_1, a_2, a_3 так, что

$$C_2^1 = a_2 + ia_1; \quad C_1^1 = a_0 + ia_3,$$

---

[1] Термин «унитарная группа» обусловлен тем, что ее преобразования описываются унитарными матрицами. Напомним, что *унитарными* называются матрицы C, удовлетворяющие условию $C^\dagger C = I$, где $C^\dagger$ – матрица, получающаяся из C процедурами комплексного сопряжения и транспонирования. Легко видеть, что для матрицы

$$C = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix}.$$

Условия (4.2.15) означают унитарность.

тогда матрица унимодулярных унитарных преобразований приводится к виду

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ -\overset{*}{C}{}_2^1 & \overset{*}{C}{}_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0+ia_3 & a_2+ia_1 \\ -a_2+ia_1 & a_0-ia_3 \end{pmatrix}, \qquad (4.2.17)$$

где вследствие (4.2.13) вещественные параметры удовлетворяют соотношению

$$C_1^1C_2^2 - C_2^1C_1^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \qquad (4.2.18)$$

т. е. независимыми остаются только три из них.

Очевидно, что преобразования из группы $SU(2)$ не выводят за пределы одной и той же БСКО ранга (3,3).

6. Матрицу коэффициентов $\{C_s^r\}$ произвольного $SL(2,C)$-преобразования можно представить в виде произведения эрмитовой матрицы[2)] на унитарную:

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0+b_3 & b_1-ib_2 \\ b_1+ib_2 & b_0-b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0+ia_3 & a_2+ia_1 \\ -a_2+ia_1 & a_0-ia_3 \end{pmatrix}. \qquad (4.2.19)$$

Данное утверждение можно обосновать, опираясь на соответствующие теоремы из теории матриц, а можно доказать и непосредственно[3)]. Следовательно, можно утверждать, что *преобразования, дополняющие 3-параметрическую группу $SU(2)$ до полной*

[2)] Напомним, что *эрмитовыми* называются матрицы B, удовлетворяющие условию $B = B^\dagger$, где $B^\dagger$ – матрица, получающаяся из B процедурами комплексного сопряжения и транспонирования.

[3)] Для этого матрицу $\{C_s^r\}$ следует представить в виде

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1+ic_2 & c_3+ic_4 \\ c_5+ic_6 & c_7+ic_8 \end{pmatrix}.$$

6-парметрической группы $SL(2, C)$, *характеризуются эрмитовыми матрицами* вида

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix}, \tag{4.2.20}$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 — четыре вещественных параметра, удовлетворяющих условию

$$C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1, \tag{4.2.21}$$

т. е. независимыми являются только три. Такие преобразования не образуют подгруппу. В литературе они часто называются *бустами.*

7. При данных преобразованиях парные отношения $u_{i\alpha}$ не являются инвариантами. Они изменяются. Однако после таких преобразований измененные $u'_{i\alpha}$ образуют новую БСКО ранга (3,3), в которой фундаментальные 2×2-отношения точно такие же, что и в исходной БСКО ранга (3,3).

4.3. Алгебра 2-компонентных спиноров

1. Кратко напомним основные положения теории 2-компонентных спиноров. Отметим, что этот материал относится к об-

---

где вследствие (4.2.13) вещественные параметры c_l $(l = 1, 2, \dots, 8)$ удовлетворяют условиям:

$$c_1c_7 - c_2c_8 - c_3c_5 + c_4c_6 = 1; \quad c_2c_7 + c_1c_8 - c_3c_6 - c_4c_5 = 0.$$

Из (4.2.15) можно получить 8 вещественных уравнений на 8 неизвестных коэффициентов: b_0, b_1, b_2, b_3 и a_0, a_1, a_2, a_3. Легко показать, что в случае

$$2 + \sum_{l=1}^{8} c_l^2 \neq 0$$

семь неизвестных b_1, b_2, b_3 и a_0, a_1, a_2, a_3 выражаются через $b_0 \neq 0$ и параметры c_l.

щим свойствам 2-компонентных спиноров безотносительно к излагаемой здесь бинарной геометрофизике, однако он важен для развития данной теории.

Спиноры можно обозначать как в векторном $(\vec{i}, \vec{k})$, так и в тензорном виде. Выше фактически уже использовались тензорные обозначения (i^s, k^s). Еще раз запишем скалярное произведение (антисимметричную метрику) для двух векторов (спиноров) в разных обозначениях:

$$(\vec{i}\vec{k}) = g_{sr} i^s k^r = b_{(ik)}, \tag{4.3.1}$$

где s и r принимают значения 1 и 2; g_{sr} является *антисимметричным 2-мерным метрическим тензором*

$$g_{sr} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.2}$$

Метрический тензор совпадает с 2-мерным символом Леви-Чивиты

$$g_{sr} = \varepsilon_{sr} = \left\{ \begin{matrix} 0, & \text{если} & s = r; \\ +1, & \text{если} & sr = 12; \\ -1, & \text{если} & sr = 21. \end{matrix} \right\} \tag{4.3.3}$$

2. Величины с верхними индексами называются *контравариантными*, а с нижними – *ковариантными*. По одинаковым индексам, встречающимся сверху и снизу, подразумевается суммирование (в данном случае от 1 до 2). Метрический тензор в формулах (4.3.1)–(4.3.3) является ковариантным. Ему можно соотнести контравариантный метрический тензор g^{sr} по обычным тензорным правилам

$$g^{sr} = \frac{\text{Алгебр. дополн. } g_{sr}}{|g_{sr}|} \to g^{sr} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

Имеют место соотношения:

$$g_{sr}g^{sr} = 2; \quad g_{sr}g^{rl} = \delta_s^l, \tag{4.3.5}$$

где

$$\delta_s^l = \begin{Bmatrix} 1, & \text{если} & s = l; \\ 0, & \text{если} & s \neq l \end{Bmatrix}$$

– символ Кронекера. С помощью компонент метрического тензора можно ввести ковариантные компоненты спиноров (ковариантные параметры элементов):

$$i_s = g_{sr}i^r. \tag{4.3.6}$$

Особо следует подчеркнуть, что «немой» индекс у g_{sr}, по которому производится суммирование, – второй. Можно записать и обратное соотношение

$$i^s = g^{rs}i_r. \tag{4.3.7}$$

При поднятии индексов «немой» индекс у g^{rs} должен быть первым. Из формулы (4.3.7) следует

$$i_1 = g_{12}i^2 = i^2; \quad i_2 = g_{21}i^1 = -i^1. \tag{4.3.8}$$

Совершенно аналогично вводится метрический тензор во втором множестве (пространстве) $\mathcal{N}$. Всякий раз, когда будет необходимо подчеркнуть принадлежность компонент пространствам $\mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$, будем для пространства $\mathcal{N}$ индексы писать с точками сверху, тогда как для пространства $\mathcal{M}$ – без точек. Компоненты $g_{\dot{s}\dot{r}}$ и $g^{\dot{s}\dot{r}}$ имеют в точности те же значения, что g_{sr} и g^{sr}, так что справедливы аналогичные соотношения между ковариантными и контравариантными компонентами спиноров во втором пространстве.

3. Поскольку в теории спиноров исходными являются метрика и группа преобразований, то ключевую роль в этой

теории играют объекты, преобразующиеся по различным представлениям группы. Таковыми являются всевозможные *смешанные спинтензоры* — величины, преобразующиеся как произведения произвольного числа спиноров из двух пространств. Так, спинтензор ранга $m+n$ преобразуется по закону

$$B^{sr\ldots\dot{l}\dot{p}\ldots} \sim i^s k^r \ldots \beta^{\dot{l}} \gamma^{\dot{p}} \ldots, \tag{4.3.9}$$

т. е.

$$B'^{sr\ldots\dot{l}\dot{p}\ldots} = C^s_a C^r_b \ldots \overset{*}{C}{}^{\dot{l}}_{\dot{c}} \overset{*}{C}{}^{\dot{p}}_{\dot{d}} \ldots B^{ab\ldots\dot{c}\dot{d}\ldots}. \tag{4.3.10}$$

Очевидно, что можно писать смешанные спинтензоры и с ковариантными индексами, например

$$B_{s\dot{r}} = B^{l\dot{p}} g_{sl}\, g_{\dot{r}\dot{p}}. \tag{4.3.11}$$

При преобразованиях из группы $SL(2,C)$ остаются инвариантными комбинации типа

$$B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}}, \quad B_{s\dot{r}\dot{p}}B^{s\dot{r}\dot{p}}, \quad \ldots .$$

4.4. Переход от предгеометрии к геометрии Лобачевского

Как уже отмечалось, от бинарных систем отношений можно перейти к унарным системам отношений (к унарным геометриям), причем, как правило, из одной бинарной системы можно получать несколько унарных геометрий. Рассмотрим здесь переход от охарактеризованной выше предгеометрии к унарной геометрии Лобачевского, играющей чрезвычайно важную роль в развитии программы бинарной геометрофизики.

4.4.1. Изотропные векторы

1. Построим по правилу (4.3.9) спинтензор

$$B^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}}, \tag{4.4.1}$$

где элементы i и α характеризуются сопряженными компонентами, согласно (4.1.6). Комплексная сопряженность здесь соответствует специальному выбору «сшиваемых» элементов из двух множеств. Вследствие этих условий компоненты $B^{1\dot{1}}$ и $B^{2\dot{2}}$ вещественны, а $B^{1\dot{2}}$ и $B^{2\dot{1}}$ – комплексно сопряжены друг другу. Матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1\alpha^1 & i^1\alpha^2 \\ i^2\alpha^1 & i^2\alpha^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 - ik^2 \\ k^1 + ik^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} = k^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} k^l \sigma_l, \quad (4.4.2)$$

где k^0, k^1, k^2, k^3 – четверка вещественных чисел, I_2 – единичная 2×2-матрица, σ_l – три 2×2-матрицы Паули:

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

удовлетворяющие известным соотношениям[4)]:

$$Sp\sigma_l = 0; \quad \sigma_i\sigma_l + \sigma_l\sigma_i = 2\delta_{il}I_2; \quad \sigma_i\sigma_l = i\varepsilon_{ilj}\sigma_j + \delta_{il}. \quad (4.4.4)$$

Здесь δ_{il} – символы Кронекера, ε_{ilj} – 3-мерный символ Леви-Чивиты.

[4)] Можно также сказать, что матрицы Паули являются образующими алгебры Клиффорда $C(3,0)$.

На основании данной записи можно утверждать, что матрица из компонент рассматриваемого спинтензора представляет собой кватернион.

2. Спинтензорный инвариант $B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}}$, образованный из $B^{s\dot{r}}$ согласно (4.4.1), тождественно равен нулю:

$$\frac{1}{2}B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}} = \begin{vmatrix} k^0 + k^3 & k^1 - ik^2 \\ k^1 + ik^2 & k^0 - k^3 \end{vmatrix} = (k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 = 0. \tag{4.4.5}$$

3. Из (4.4.2) можно выразить обратно k^μ через параметры сопряженных элементов:

$$\begin{aligned} k^0(i\alpha) &= \frac{1}{2}\left(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2\right); \\ k^1(i\alpha) &= \frac{1}{2}\left(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}\right) = \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1\right); \\ k^2(i\alpha) &= \frac{i}{2}\left(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}\right) = \frac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1\right); \\ k^3(i\alpha) &= \frac{1}{2}\left(B^{1\dot{1}} - B^{2\dot{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2\right). \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Вследствие условия (4.4.5) четыре компоненты $k^\mu(i\alpha)$ не являются независимыми. Они связаны условием, соответствующим свойству изотропных векторов в 4-мерном пространстве Минковского. Таким образом, сопряженным парам элементов i, α можно поставить в соответствие изотропную величину с компонентами (4.4.5) в некотором 4-мерном многообразии с сигнатурой $(+---)$.

4. Зная закон линейных преобразований параметров элементов, легко показать, что построенные из них квадратичные комбинации (4.4.6) также преобразуются линейным образом

$$k'^\mu = L^\mu_{\cdot\alpha}k^\alpha, \tag{4.4.7}$$

где 16 коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ являются вещественными, если коэффициенты C^{s}_{r} и $\tilde{C}^{s}_{r}$ комплексно сопряжены.

5. Выпишем часть выражений для компонент $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$:

$$\begin{aligned}
L^{0}_{\cdot 0} &= \frac{1}{2}\left(C^{1}_{1}\overset{*}{C}{}^{1}_{1} + C^{1}_{2}\overset{*}{C}{}^{1}_{2} + C^{2}_{1}\overset{*}{C}{}^{2}_{1} + C^{2}_{2}\overset{*}{C}{}^{2}_{2}\right);\\
L^{0}_{\cdot 1} &= \frac{1}{2}\left(C^{1}_{1}\overset{*}{C}{}^{1}_{2} + C^{1}_{2}\overset{*}{C}{}^{1}_{1} + C^{2}_{1}\overset{*}{C}{}^{2}_{2} + C^{2}_{2}\overset{*}{C}{}^{2}_{1}\right);\\
L^{0}_{\cdot 2} &= -\frac{i}{2}\left(C^{1}_{1}\overset{*}{C}{}^{1}_{2} - C^{1}_{2}\overset{*}{C}{}^{1}_{1} + C^{2}_{1}\overset{*}{C}{}^{2}_{2} - C^{2}_{2}\overset{*}{C}{}^{2}_{1}\right);\\
L^{0}_{\cdot 3} &= \frac{1}{2}\left(C^{1}_{1}\overset{*}{C}{}^{1}_{1} - C^{1}_{2}\overset{*}{C}{}^{1}_{2} + C^{2}_{1}\overset{*}{C}{}^{2}_{1} - C^{2}_{2}\overset{*}{C}{}^{2}_{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Остальные 12 компонент записываются аналогичным образом.

6. Все $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$, как и C^{s}_{r} для группы $SL(2, C)$, определяются шестью независимыми вещественными параметрами. Можно убедиться, что 16 коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ удовлетворяют 10 условиям:

$$\eta_{\mu\nu}L^{\mu}_{\cdot\alpha}L^{\nu}_{\cdot\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \tag{4.4.9}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор геометрии Минковского. Преобразования с коэффициентами $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ образуют 6-параметрическую *ортогональную группу* $O(1, 3)$, которую принято называть *векторным представлением группы* $SL(2, C)$. Теперь имеются все основания называть величины k^{μ} из (4.4.6) компонентами изотропного вектора.

4.4.2. Неизотропные векторы

В рамках одной и той же системы отношений можно выделять и более сложные комбинации элементов. Таковыми, например, являются две пары сопряженных элементов БСКО ранга (3,3), которым сопоставляется один элемент УСВО. Очевидно, что при объединении элементов в такие конструкции должны удовлетворяться некие соотношения (дополнительные условия сшивки) между их параметрами.

1. Для каждой четверки разноименных элементов i, α, k, β можно определить смешанный спинтензор второго ранга, причем это можно сделать несколькими способами. Выделим из них два, соответствующие симметричным комбинациям из двух пар сопряженных элементов. Это означает, что спинтензор $B^{s\dot{r}}$ можно строить в видах:

$$B^{s\dot{r}}_{(2)} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}}, \tag{4.4.10}$$

$$\tilde{B}^{s\dot{r}}_{(2)} = i^s\beta^{\dot{r}} + k^s\alpha^{\dot{r}}, \tag{4.4.11}$$

где индекс (2) здесь и далее означает определение величины для двух пар элементов. Тогда любую из этих матриц $B^{s\dot{r}}$ для *сопряженных элементов* можно представить в следующих видах:

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{2}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0_{(2)} + B^3_{(2)} & B^1_{(2)} - iB^2_{(2)} \\ B^1_{(2)} + iB^2_{(2)} & B^0_{(2)} - B^3_{(2)} \end{pmatrix} = B^0_{(2)} I_2 + \sum_{l=1}^{3} B^l_{(2)}\sigma_l, \tag{4.4.12}$$

где $B^\mu_{(2)}$ — четыре вещественных числа, σ_l — матрицы Паули.

2. Построим спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{2}B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}} = \left(B^0_{(2)}\right)^2 - \left(B^1_{(2)}\right)^2 - \left(B^2_{(2)}\right)^2 - \left(B^3_{(2)}\right)^2 = \eta_{\mu\nu}B^\mu_{(2)}B^\nu_{(2)}. \tag{4.4.13}$$

Легко показать, что этот инвариант в общем случае отличен от нуля и представляется в следующих видах:

$$\eta_{\mu\nu}B^\mu_{(2)}B^\nu_{(2)} = 2k_\mu(i\alpha)k^\mu(k\beta) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} \equiv B^2_{(ik)}. \tag{4.4.14}$$

Эта формула лишний раз подчеркивает особую значимость в теории спиноров именно смешанных спинтензоров второго ранга: построенный из них *инвариант совпадает с фундаментальным* 2×2*-отношением* в теории БСКО ранга (3,3).

3. Аналогично (4.4.6) выразим компоненты $B^{\mu}_{(2)}$ через параметры четырех элементов:

$$
\begin{aligned}
B^0_{(2)}(ik) &= \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right);\\
B^1_{(2)}(ik) &= \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1\right);\\
B^2_{(2)}(ik) &= \frac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right);\\
B^3_{(2)}(ik) &= \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right).
\end{aligned}
\tag{4.4.15}
$$

Здесь везде в виде аргумента указаны для простоты лишь элементы одного множества $\mathcal{M}$.

Такие же формулы имеют место для компонент второго варианта определения вектора согласно (4.4.11).

4. Принципиальная сторона описанного выше перехода пояснена на рис. 4.2. В верхней части рисунка изображены четверки сопряженных элементов из двух множеств БСКО ранга (3,3), а в нижней части — сопоставленные с ними элементы одного нового множества $\mathcal{M}'$, характеризуемых компонентами (4.4.15). Четверки элементов БСКО будем обозначать двумя значками соответствующих элементов одного (первого) множества $\mathcal{M}$, а элементы нового множества $\mathcal{M}'$ — латинскими буквами, согласно:

$$
\begin{gathered}
(ik) \to a; \quad (js) \to b; \quad (mn) \to c;\\
(lp) \to d; \quad (rt) \to f.
\end{gathered}
\tag{4.4.16}
$$

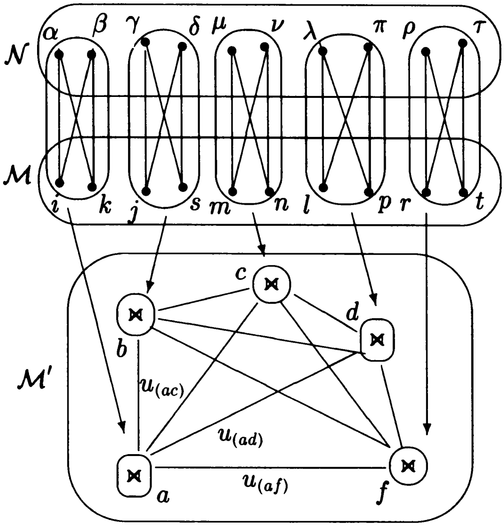


Рис. 4.2. Переход от БСКО ранга (3,3) к УСВО ранга (5)

5. Определим парные отношения между элементами нового множества через параметры элементов БСКО ранга (3,3), согласно (4.4.14):

$$u_{(ab)} = B_\mu(ik)B^\mu(js) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{bmatrix} \bigotimes \begin{bmatrix}\gamma\delta\\ js\end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\delta\\ is\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\delta\\ ks\end{bmatrix}\right). \qquad (4.4.17)$$

Кроме того, введем внутренние отношения элементов нового множества, в качестве которых будут выступать фундаментальные 2×2-отношения соответствующих четверок элементов БСКО ранга (3,3):

$$u_{(aa)} \equiv B^2(ik) = \begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{bmatrix}; \quad u_{(bb)} \equiv B^2(js) = \begin{bmatrix}\gamma\delta\\ is\end{bmatrix}; \quad \ldots . \qquad (4.4.18)$$

6. Система из пяти 4-мерных векторов B^μ, соответствующих пяти наборам из четверок элементов, является линейно зависимой, т. е. для нее можно записать тождественно равный нулю определитель Грама, составленный из парных (внешних и внутренних) отношений между элементами множества $\mathcal{M}'$:

$$\begin{vmatrix} B^2(ik) & B_\mu(ik)B^\mu(js) & B_\mu(ik)B^\mu(mn) & B_\mu(ik)B^\mu(lp) & B_\mu(ik)B^\mu(rt) \\ B_\mu(js)B^\mu(ik) & B^2(js) & B_\mu(js)B^\mu(mn) & B_\mu(js)B^\mu(lp) & B_\mu(js)B^\mu(rt) \\ B_\mu(mn)B^\mu(ik) & B_\mu(mn)B^\mu(js) & B^2(mn) & B_\mu(mn)B^\mu(lp) & B_\mu(mn)B^\mu(rt) \\ B_\mu(lp)B^\mu(ik) & B_\mu(lp)B^\mu(js) & B_\mu(lp)B^\mu(mn) & B^2(lp) & B_\mu(lp)B^\mu(rt) \\ B_\mu(rt)B^\mu(ik) & B_\mu(rt)B^\mu(js) & B_\mu(rt)B^\mu(mn) & B_\mu(rt)B^\mu(lp) & B^2(lp) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4.19}$$

7. Будем полагать, что рассматриваются не все возможные, а именно такие четверки элементов, для которых внутренние отношения одинаковы, т. е. пусть будут нормированы на единицу

$$B^2(ik) = B^2(js) = \ldots = 1 \to \tilde{u}_{(aa)} = \tilde{u}_{(bb)} = \ldots = 1. \tag{4.4.20}$$

Заметим, что можно было бы выбрать нормировку на одинаковые массы или электрический заряд. Заменяя в (4.4.19) скалярные произведения на перекрестные парные отношения (4.4.17), получаем

$$\Phi_{(5)} = \begin{vmatrix} 1 & u_{(ab)} & u_{(ac)} & u_{(ad)} & u_{(ae)} \\ u_{(ba)} & 1 & u_{(bc)} & u_{(bd)} & u_{(be)} \\ u_{(ca)} & u_{(cb)} & 1 & u_{(cd)} & u_{(ce)} \\ u_{(da)} & u_{(db)} & u_{(dc)} & 1 & u_{(de)} \\ u_{(ea)} & u_{(eb)} & u_{(ec)} & u_{(ed)} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4.21}$$

Это есть не что иное, как закон (2.2.11) для УСВО ранга (5), характеризующий 3-мерную геометрию (пространство) Лобаческого. В этом случае элементами определителя в (2.2.11) будут выступать скалярные произведения единичных векторов 4-скорости $u^{\mu}_{(a)}$. С учетом нормировки на единицу имеем

$$u_{(ab)} = \sqrt{\left(1 + u_1^2(a) + u_2^2(a) + u_3^2(a)\right)\left(1 + u_1^2(b) + u_2^2(b) + u_3^2(b)\right)} - \\ - u_1(a)u_1(b) - u_2(a)u_2(b) - u_3(a)u_3(b), \qquad (4.4.22)$$

где $u_s(a)$ — пространственно-подобные компоненты вектора $u_{\mu}(ik) = u_{\mu}(a)$.

8. Формулы (4.4.15) фактически определяют компоненты неизотропного вектора $B^{\mu}_{(2)} \equiv B^{\mu}(ik)$ через геометрическую сумму (или разность) двух изотропных векторов, соответствующих двум парам сопряженных элементов i, α и k, β, рассмотренных в предыдущем разделе. Если начала этих изотропных векторов поместить в одну вершину, то сами векторы будут лежать на изотропном конусе, а результирующий вектор (их сумма или разность) будет располагаться либо внутри одного из конусов (если вектор времени-подобен), либо между конусами (если вектор пространственно-подобен). Конец результирующего вектора будет лежать либо на поверхности двухполосного гиперболоида (если вектор времени-подобен), либо на поверхности однополосного гиперболоида (если вектор пространственно-подобен).

4.5. Выводы и замечания

Из изложенного в этой главе можно сделать ряд принципиально важных выводов:

1. В бинарной геометрифизике при данной выше интерпретации элементов двух множеств понятие эволюции системы содержится в самом основании теории. Два множества элементов и отношения между ними составляют прообраз классического времени. Развиваемая на этой основе теория

предназначена для описания процесса развития мира, который в каждый момент как бы рождается заново, что образным языком отражено в словах известной песни с глубоким философским содержанием:

> Есть только миг между прошлым и будущим,
> Именно он называется жизнь.

В этом состоит существенное отличие от классических пространственно-временных представлений, которые по сути статичны. Согласно реляционному подходу, категория классического пространства-времени является продуктом мыслительной деятельности человека, основанной на памяти об уже осуществившихся явлениях (процессах), которые продлеваются в будущее.

Классическая физика и соответствующая ей геометрия имеют дело с отношениями между уже осуществившимися (или мыслимыми в будущем) событиями, тогда как физика микромира описывает не отношения между уже состоявшимися событиями, а элементарные звенья процессов творения новых событий, которые, в принципе, являются вероятностными. В этом состоит смысл квантовой механики. Все это свидетельствует о необходимость использования предгеометрии, опирающейся на БСКО ранга (3,3).

2. В современной теоретической физике спиноры вводятся, либо посредством своеобразного извлечения «квадратного корня» из векторов, либо с помощью замены скалярной волновой функции на спинорную также путем извлечения «квадратного корня» из уравнения Клейна–Фока–Гордона, либо, – математически более строго, – на основе теории алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел. Теория БСКО предоставляет еще один, новый путь введения спиноров, который в рамках БСКО ранга (3,3) дает эквивалентную теорию 2-компонентных спиноров (и биспиноров), а в случае более высоких рангов открывает новый канал обобщения понятия спинора.

3. При изложении квантовой механики часто говорят о своеобразном извлечении «квадратных корней» из привычных классических величин и соотношений. Здесь, прежде всего, имеют в виду спиноры как «квадратные корни из векторов». Аналогичным примером является введение амплитуд вероятности в квантовой механике «как квадратных корней из классической вероятности». В общей теории относительности при описании спинорных частиц важную роль играют тетрады, которые также можно рассматривать как своеобразные «квадратные корни из компонент метрического тензора». Примечательно, что все названные примеры так или иначе связаны с квантовой теорией. Открытие бинарных геометрий следует поставить в один ряд с названными примерами, т. е. *бинарную геометрию можно назвать «корнем квадратным из обычной унарной геометрии»*, поскольку «склеивая» два множества элементов бинарной системы отношений, можно получить одно множество точек обычной геометрии.

4. Если в общепринятой теории спиноры вводятся, исходя из готового 4-мерного пространства-времени, то в бинарной геометрофизике (предгеометрии) предлагается обратный ход: из вида спиноров выводятся размерность и сигнатура многообразия, в котором определены эти спиноры.

5. В близкой по преследуемым целям твисторной программе Пенроуза 2-компонентные спиноры и твисторы постулируются, тогда как в бинарной геометрофизике спиноры возникают автоматически как следствие предгеометрии, построенной на основе БСКО ранга (3,3).

6. Следует особо подчеркнуть, что бинарная геометрофизика строится на основе системы своих собственных принципов, не содержащих классических пространственно-временных или других инородных понятий. В частности, не требуется понятия макроприбора, необходимого при общепринятом изложении квантовой механики.

Глава 5

Системы отношений в физике микромира

- Биспиноры и элементарные частицы
- Образующие и базис алгебры Клиффорда C(1,3)
- Определение массивной частицы
- Массивная частица в собственной системе отношений
- Прообраз уравнений Дирака
- Бинарная геометрофизика и квантовая теория

Рассмотренная в предыдущей главе бинарная геометрия с комплексными парными отношениями предназначена для описания закономерностей квантовой теории и физики микромира. При этом чрезвычайно важным обстоятельством, существенно отличающим данную теорию от общепринятых, является характер базиса: в качестве системы эталонных элементов, относительно которых определяются параметры микрочастиц, выступают такие же элементарные частицы.

В связи с этим следует напомнить, что разделы общепринятой физики (теории) принято различать в зависимости от масштаба (сложности) рассматриваемых в них объектов:

в классической физике (механике) рассматриваются *макрообъекты*, а в квантовой механике и физике микромира описывается поведение *микрочастиц*. Исходя из этого, разделы общепринятой теории можно разделить на два класса – на имеющие дело с макрообъектами (обозначим их латинской буквой m) и на описывающие микрообъекты (обозначим их греческой буквой μ). Разделам физических теорий присвоим коренной символ R, тогда два названных класса можно обозначать символами $R(m)$ и $R(\mu)$.

Названные классы существенно отличаются друг от друга, но их роднит общее: в них чрезвычайно важную роль играет тело отсчета или, – в более широком смысле, – понятие *системы отсчета или их обобщений*. В нерелятивистской механике имеет место принцип относительности Галилея, а основу релятивистской механики составляет специальная теория относительности. В общей теории относительности оказалось необходимым развить специальные методы описания систем отсчета.

Современная квантовая теория сформулирована в релятивистски инвариантном виде. В ней, как отмечали В. А. Фок, В. Паули и другие авторы, роль системы отсчета играет понятие макроприбора, включающее в себя нечто большее, чем это закладывается в классическую систему отсчета. Исходя из этого, рассматривалась тесная аналогия между системами отсчета в теории относительности и макроприбором в квантовой механике. В современной квантовой механике и физике микромира всегда подразумевается, что описание микрочастиц производится относительно классического макроприбора. Отражая это обстоятельство, введем в символическое обозначение теории снизу символ макрообъекта m. Тогда классической физике (первый класс теорий) будет соответствовать символ $R_m(m)$, а второму классу теорий, описывающих микрочастицы, – символ $R_m(\mu)$.

Однако развиваемая на основе бинарных систем комплексных отношений теория имеет принципиально иной характер:

в ней микрочастицы рассматриваются относительно таких же микрочастиц. Поэтому, в соответствии с введенными обозначениями, ее следует охарактеризовать символом $R_\mu(\mu)$. Построение этой теории основывается на убежденности в том, что теория микромира должна опираться на самостоятельную систему понятий и представлений, не нуждающихся в привлечении чуждого ей понятия классического макроприбора.

Мы отдаем себе отчет в том, что это противоречит утверждениям ряда авторитетных авторов, в частности, позиции Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, высказанной ими в «Квантовой механике»: «Обычно более общая теория может быть сформулирована логически замкнутым образом независимо от менее общей теории, являющейся ее предельным случаем. Так, релятивистская механика может быть построена на основании своих основных принципов без всяких ссылок на ньютоновскую механику. Формулировка же основных положений квантовой механики принципиально невозможна без привлечения механики классической... Для системы из одних только квантовых объектов вообще нельзя было бы построить никакой логически замкнутой механики» [1)].

В этой главе (уже в рамках бинарных систем отношений) вводится определение идеализированных частиц и перебрасывается мостик от характеристик частиц в бинарной геометрофизике к методике их описания в рамках общепринятой квантовой электродинамики. Показано, что важнейшие свойства спинорных частиц (фермионов) можно описать чисто алгебраически в терминах БСКО ранга (3,3), не опираясь на используемое в теоретико-полевом подходе координатное пространство-время и вводимые на его фоне дифференциальные полевые уравнения.

Ключевую роль в теории элементарных частиц на базе БСКО ранга (3,3) играют вводимые здесь условия связи «по

[1)] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. С. 15.

горизонтали» параметров пар элементов, определяющих массивную частицу в каждом из множеств бинарной системы отношений. На их основе строится прообраз уравнений Дирака для свободных частиц в импульсном пространстве.

Особо следует подчеркнуть следующие обстоятельства:

1) в данной главе речь идет о понятиях, присущих, главным образом, идеализированным, т. е. свободным, невзаимодействующим частицам;
2) рассматриваемые здесь характеристики частиц в наибольшей мере принадлежат общепринятой электродинамике;
3) 2-компонентные частицы соответствуют (массивным) лептонам.

При изложении данного материала не покидает чувство удивления: в данном подходе почти автоматически проявляются многие понятия и свойства общепринятой теории, построенной на совершенно иных принципах, исходящих из наличия классического пространства-времени.

5.1. Биспиноры и элементарные частицы

1. Как было показано, неизотропные векторы можно образовать, как минимум, для пар элементов в каждом из двух множеств бинарной системы отношений. Поскольку каждый из элементов характеризуется 2-компонентным спинором, то простейшие массивные частицы в каждом из множеств должны описываться наборами из четверок комплексных чисел (компонент) вида:

$$B_{(2)}(ik) \to \begin{pmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{pmatrix}; \quad B_{(2)}(\alpha\beta) \to \begin{pmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}. \qquad (5.1.1)$$

2. Для полноты картины следует упомянуть, что в данном варианте теории можно также рассматривать частицы, харак-

теризуемые лишь одиночными элементами в каждом из множеств. Такие частицы следует интерпретировать как безмассовые лептоны, т. е. нейтрино. В будущем будет показано, что в бинарной геометрофизике все виды частиц описываются единообразно, поэтому и в данном простейшем случае БСКО ранга (3,3) нейтрино целесообразно представлять в каждом из множеств в виде 2×2-матриц, как и (5.1.1). При этом возникает две возможности:

$$\nu(i0) \to \begin{pmatrix} i^1 & 0 \\ i^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\nu}(0k) \to \begin{pmatrix} 0 & k^1 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}, \tag{5.1.2}$$

которые, в соответствии с общепринятой моделью электрослабых взаимодействий, можно трактовать как нейтрино и антинейтрино.

Приведенные здесь обозначения частиц через матрицы из параметров их элементов естественны для бинарной геометрофизики, однако в исследованиях по квантовой электродинамике принята иная запись, обусловленная тем, что теория развивалась на основе совершенно других соображений.

3. Интерпретируя в рамках бинарной геометрофизики устоявшееся в теоретической физике описание фермионных частиц через 4-компонентные биспинорные столбцы и строки, разобьем на две четверки восемь комплексных компонент из (5.1.1), характеризующих одну массивную частицу. Одна из них записывается в виде 4-компонентного столбца Ψ, а вторая – в виде строки $\Psi^\dagger$. Полагается, что элементы столбца и строки соответствуют друг другу по принципу сопряжения пар элементов «по вертикали»: (i, α), (k, β). Для свободных частиц это означает комплексное сопряжение параметров сопоставленных элементов, согласно (4.1.5).

4. Столбец и строка строятся согласно следующим трем условиям.

1) В них симметрично присутствуют параметры двух элементов, образующих массивную частицу. Это условие еще оставляет произвол, так как столбец Ψ может включать параметры элементов из одного или разных множеств $\mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$.

2) Столбец и строка должны равноправно содержать элементы из начального и конечного состояний. Образуем столбец из параметров элементов i и β, не состоящих друг с другом в паре «по вертикали».

3) Порядок расположения элементов в столбце обусловлен трансформационными свойствами параметров. Так, если i^s является контравариантным спинором, то для элемента β должен браться ковариантный спинор. Следовательно, массивную частицу можно охарактеризовать следующими 4-компонентными величинами:

$$\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta^2 \\ -\beta^1 \end{pmatrix}; \tag{5.1.3}$$

$$\Psi^\dagger = (\alpha^1, \alpha^2, k_1, k_2) = (\alpha^1, \alpha^2, k^2, -k^1).$$

5. Согласно приведенным в разделе 4.3 соотношениям между ко- и контравариантными компонентами спинора, столбец Ψ преобразуется при преобразованиях из группы $SL(2, C)$ следующим образом:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & 0 & 0 \\ C_1^2 & C_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{*}{C}{}_2^2 & -\overset{*}{C}{}_1^2 \\ 0 & 0 & -\overset{*}{C}{}_2^1 & \overset{*}{C}{}_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \equiv S\Psi. \tag{5.1.4}$$

Поскольку матрица преобразований S приводима к блочному виду, а Ψ составлено из двух спиноров, говорят, что Ψ является *биспинором.*

6. При $SL(2, C)$ преобразованиях остаются инвариантными две билинейные комбинации: $i^1 k^2 - i^2 k^1$ и $\alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1$. Для записанных в (5.1.3) величин можно подобрать некую матрицу, назовем ее γ_0, такую, чтобы билинейная комбинация $\Psi^\dagger \gamma_0 \Psi$ равнялась сумме инвариантов, т. е.

$$\Psi^\dagger \gamma_0 \Psi = -(i^1 k^2 - i^2 k^1) - (\alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1) \equiv \overline{\Psi}\Psi. \tag{5.1.5}$$

Очевидно, что γ_0 должно иметь вид

$$\gamma_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1.6}$$

Здесь знак минус выбран из соображений удобства. В (5.1.5) введено обозначение

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma_0 = -(k_1, k_2, \alpha^1, \alpha^2). \tag{5.1.7}$$

Из (5.1.4) и (5.1.7) следует, что строка $\overline{\Psi}$ преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi} S^{-1}, \tag{5.1.8}$$

где S^{-1} – матрица, обратная S:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} C_2^2 & -C_2^1 & 0 & 0 \\ -C_1^2 & C_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{*}{C}{}_1^1 & \overset{*}{C}{}_1^2 \\ 0 & 0 & \overset{*}{C}{}_2^1 & \overset{*}{C}{}_2^2 \end{pmatrix}. \tag{5.1.9}$$

7. Введем еще одну 4-рядную матрицу γ_5 из условия, чтобы билинейная комбинация из столбца и строки образовывала разность спинорных инвариантов:

$$\overline{\Psi}\gamma_5\Psi = i\left[\left(i^1k^2 - i^2k^1\right) - \left(\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1\right)\right], \tag{5.1.10}$$

где коэффициент i выбран для удобства. Легко показать, что новая матрица имеет вид

$$\gamma_5 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \tag{5.1.11}$$

и является пространственно-подобной, поскольку $\gamma_5^2 = -1$.

8. С помощью матриц γ_5 вводятся общепринятые понятия левых (e_L) и правых (e_R) компонент массивной частицы (например, электрона):

$$e_L \equiv \frac{1}{2}(1+i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_R \equiv \frac{1}{2}(1-i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{5.1.12}$$

Аналогично, из 4-компонентной строки получаются сопряженные компоненты:

$$\begin{aligned} \bar{e}_L &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 - i\gamma_5) = (0, 0, \alpha^1, \alpha^2); \\ \bar{e}_R &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 + i\gamma_5) = -(k_1, k_2, 0, 0). \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

Таким образом, элемент i (и сопряженный ему элемент α) можно называть *левой компонентой* частицы, а элемент k (и сопряженный ему β) – *правой компонентой*. Используя определения левых и правых компонент, можно записать

$$\Psi = e_L + e_R; \quad \overline{\Psi} = \bar{e}_L + \bar{e}_R. \tag{5.1.14}$$

5.2. Образующие и базис алгебры Клиффорда С(1,3)

1. Легко показать, что компоненты $\tilde{u}_\mu \equiv B_{\mu(2)}$ в (4.4.15) записываются посредством матрицы γ_0 и трех матриц γ_i:

$$2\tilde{u}_\mu = \overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi, \tag{5.2.1}$$

где γ_i – три пространственно-подобные матрицы Дирака в стандартном представлении

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.2.2}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь σ^i – матрицы Паули, записанные в (4.4.3).

Матрицы Дирака удовлетворяют известным соотношениям:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}I_4, \tag{5.2.3}$$

т. е. γ_0 времени-подобна, а матрицы γ_i — пространственно-подобны. Матрицы Дирака являются *образующими алгебры Клиффорда* $C(1,3)$ над полем вещественных чисел.

2. Из законов преобразований Ψ и $\overline{\Psi}$ можно другим путем убедиться, что компоненты $\tilde{u}_\mu$ преобразуются по векторному закону

$$2\tilde{u}'_\mu = \left(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right)' = \overline{\Psi}S^{-1}\gamma_\mu S\Psi = 2L^{\alpha}_{\mu\cdot}\tilde{u}_\alpha, \tag{5.2.4}$$

где $L^{\alpha}_{\mu\cdot}$ записаны в (4.4.8).

3. Собирая вместе соотношения (5.1.5), (5.1.10) и (5.2.1), получаем тождество

$$\tilde{u}_0^2 - \tilde{u}_1^2 - \tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_3^2 - \tilde{u}_5^2 - \tilde{u}_6^2 = 0, \tag{5.2.5}$$

где $2\tilde{u}_6 = \overline{\Psi}\Psi$. Это напоминает соотношение из 6-оптики, аналогичной 5-оптике Румера[2)].

4. Используя (5.1.14), компоненты вектора (5.2.1) запишем в виде

$$\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \bar{e}_L\gamma_\mu e_L + \bar{e}_R\gamma_\mu e_R. \tag{5.2.6}$$

5. Для четырех компонент комбинации $\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\Psi$ имеем выражения, аналогичные (4.4.15):

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi &= i\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right);\\
\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi &= i\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 - k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right);\\
\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi &= -i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1;\\
\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi &= i\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right).
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

[2)] *Румер Ю. Б.* Исследования по 5-оптике. М.: ГИТТЛ, 1956.

6. Оставшиеся 6 возможных комбинаций $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ представимы в виде

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_1\Psi = i^1k^1 - i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2;\\
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_2\Psi = i\big(i^1k^1 + i^2k^2 + \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2\big);\\
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_3\Psi = -i^1k^2 - i^2k^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^2\beta^1;\\
&\overline{\Psi}\gamma_2\gamma_3\Psi = i\big(-i^1k^1 + i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2\big);\\
&\overline{\Psi}\gamma_3\gamma_1\Psi = i^1k^1 + i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 - \alpha^2\beta^2;\\
&\overline{\Psi}\gamma_1\gamma_2\Psi = i\big(i^1k^2 + i^2k^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^2\beta^1\big),
\end{aligned}
\tag{5.2.8}
$$

т. е., в отличие от предшествующих выражений, записываются через парные комбинации из параметров элементов одного сорта.

Таким образом, в формулах (5.1.5), (5.1.10), (5.2.1), (5.2.7) и (5.2.8) приведены 16 квадратичных комбинаций, соответствующие всем возможным произведениям четверки матриц γ_μ. Эти величины образуют *базис алгебры Клиффорда* $C(1,3)$ *над полем вещественных чисел* и являются компонентами соответствующих тензорных величин. Тензорный характер их преобразований можно доказать, используя (5.1.4) и (5.1.9). Так, например, для величин $\overline{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\Psi$ имеем

$$
\begin{aligned}
\big(\overline{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\Psi\big)' &= \overline{\Psi}S^{-1}\gamma_\alpha\gamma_\beta S\Psi = \overline{\Psi}\big(S^{-1}\gamma_\alpha S\big)\big(S^{-1}\gamma_\beta S\big)\Psi = \\
&= \overline{\Psi}L^{\mu}_{\alpha\cdot}\gamma_\mu L^{\nu}_{\beta\cdot}\gamma_\nu\Psi = L^{\mu}_{\alpha\cdot}L^{\nu}_{\beta\cdot}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi.
\end{aligned}
\tag{5.2.9}
$$

Это закон преобразований тензора второго ранга.

5.3. Определение массивной частицы

Рассмотренные выше биспиноры и тензоры определяются для произвольных двух пар сопряженных элементов, однако, элементарные частицы (массивные лептоны) описываются не произвольными парами элементов, а специальными парами, удовлетворяющими некоторым условия связи («по горизонтали»). В качестве такого условия используется требование, чтобы для пары элементов, образующей элементарную частицу, спинорный инвариант принимал некоторое фиксированное *вещественное* значение. В рамках данной системы отношений можно было бы без ущерба для общности положить это вещественное число равным единице. Однако не будем забывать, что здесь идет речь о введении прообраза взаимодействующих частиц. По этой причине положим вещественное число равным некой (пока безразмерной) величине, физический смысл которой будет указан позже:

$$Im\left(i^1 k^2 - i^2 k^1\right) = 0 \ \rightarrow \ i^1 k^2 - i^2 k^1 = \pm\tilde{e}. \tag{5.3.1}$$

Это соотношение означает два условия на вещественные составляющие параметров. Если произвольные две пары сопряженных элементов характеризуются 4 комплексными параметрами: i^1, i^2, k^1, k^2 (8 вещественными числами), то условие (5.3.1) означает, что независимыми остаются только 6 вещественных величин.

Напомним, что в общем случае фундаментальное 2×2-отношение для сопряженных элементов вещественно и положительно. Условия (5.3.1) выделяют два частных случая: положительного и отрицательного значения $\tilde{e}$. Сопоставим эти два случая с существованием двух сортов частиц: положительно и отрицательно заряженных. Таковыми могут быть протон и электрон или частица и соответствующая ей античастица (протон и антипротон или позитрон и электрон). Пусть *частица характеризуется положительным значением*

$$i^1 k^2 - i^2 k^1 = +\tilde{e}, \tag{5.3.2}$$

а *античастица характеризуется отрицательным значением инварианта*

$$i^1 k^2 - i^2 k^1 = -\tilde{e}. \tag{5.3.3}$$

Тогда **условие связи «по горизонтали» (5.3.1) в определениях частицы и античастицы означает равенство нулю инварианта**

$$\overline{\Psi}\gamma^5\Psi = 0. \tag{5.3.4}$$

5.4. Массивная частица в собственной системе отношений

1. Назовем *собственной системой отношений* массивной частицы такую, в которой отношения между составляющими ее элементами имеют вид (см. определение канонического базиса (4.2.5)):

$$u_{i\alpha} = u_{k\beta} = \tilde{e}; \quad u_{i\beta} = u_{k\alpha} = 0. \tag{5.4.1}$$

Обозначим параметры частицы в собственной системе отношений значком (o) снизу, тогда условия (5.4.1) запишутся через параметры в виде

$$\begin{aligned} &\overset{1}{i}_{(o)}\overset{1}{\alpha}_{(o)} + \overset{2}{i}_{(o)}\overset{2}{\alpha}_{(o)} = \overset{1}{k}_{(o)}\overset{1}{\beta}_{(o)} + \overset{2}{k}_{(o)}\overset{2}{\beta}_{(o)} = \tilde{e};\\ &\overset{1}{i}_{(o)}\overset{1}{\beta}_{(o)} + \overset{2}{i}_{(o)}\overset{2}{\beta}_{(o)} = 0 \to \overset{1}{k}_{(o)}\overset{1}{\alpha}_{(o)} + \overset{2}{k}_{(o)}\overset{2}{\alpha}_{(o)} = 0, \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

где, напомним,

$$\overset{s}{\alpha}_{(o)} = \overset{*s}{i}_{(o)}; \quad \overset{s}{\beta}_{(o)} = \overset{*s}{k}_{(o)}.$$

Из (5.4.2) следует, что все параметры можно выразить через два из них. Выберем в качестве ключевых параметры $\overset{1}{i}_{(o)}$ и $\overset{2}{i}_{(o)}$.

2. Используем свойства вещественности инвариантов (5.3.2) и (5.3.3) в собственной системе отношений. Из второй строки (5.4.2) имеем

$$\overset{1}{k}_{(o)} = -\frac{\overset{*2}{i}_{(o)}\overset{2}{k}_{(o)}}{\overset{*1}{i}_{(o)}}.$$

Подставляя это выражение в значение инварианта, находим

$$i^1 k^2 - i^2 k^1 = \frac{k^2_{(o)}}{\overset{*}{i}{}^1_{(o)}} \left(i^1_{(o)} \overset{*}{i}{}^1_{(o)} + i^2_{(o)} \overset{*}{i}{}^2_{(o)} \right) = \tilde{e} \frac{k^2_{(o)}}{\overset{*}{i}{}^1_{(o)}} = \pm \tilde{e}, \tag{5.4.3}$$

где использовано (5.3.1). Это означает условия связи параметров элементов:

$$k^2_{(o)} = \pm \overset{*}{i}{}^1_{(o)}; \quad k^1_{(o)} = \mp \overset{*}{i}{}^2_{(o)}.$$

С учетом знака инварианта частицы и античастицы следует положить *для частицы*

$$i^1_{(o)} = \overset{*}{k}{}^2_{(o)}; \quad i^2_{(o)} = -\overset{*}{k}{}^1_{(o)}, \tag{5.4.4}$$

а *для античастицы*

$$i^1_{(o)} = -\overset{*}{k}{}^2_{(o)}; \quad i^2_{(o)} = \overset{*}{k}{}^1_{(o)}. \tag{5.4.5}$$

3. Используя (5.4.4) и (5.4.5), находим вид 4-компонентных столбцов соответственно для частиц и античастиц в собственной системе отношений:

$$\Psi_{(o)} = \begin{pmatrix} i^1_{(o)} \\ i^2_{(o)} \\ \beta_{1(o)} \\ \beta_{2(o)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1_{(o)} \\ i^2_{(o)} \\ i^1_{(o)} \\ i^2_{(o)} \end{pmatrix}; \quad \Psi_{(o)} = \begin{pmatrix} i^1_{(o)} \\ i^2_{(o)} \\ \beta_{1(o)} \\ \beta_{2(o)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1_{(o)} \\ i^2_{(o)} \\ -i^1_{(o)} \\ -i^2_{(o)} \end{pmatrix}. \tag{5.4.6}$$

Как уже отмечалось, эти столбцы характеризуются лишь двумя комплексными числами.

4. Используя условия (5.3.2) и (5.3.3), находим, что в собственной системе отношений

$$\tilde{u}^0_{(o)} = \frac{1}{2}\overline{\Psi}_{(o)}\gamma^0\Psi_{(o)} = \overset{\cdot}{i}{}^1_{(o)}\overset{\cdot}{i}{}^{*1}_{(o)} + \overset{\cdot}{i}{}^2_{(o)}\overset{\cdot}{i}{}^{*2}_{(o)} = \tilde{e};$$
$$\tilde{u}^i_{(o)} = \frac{1}{2}\overline{\Psi}_{(o)}\gamma^i\Psi_{(o)} = 0, \tag{5.4.7}$$

т. е. как для частицы, так и для античастицы отлична от нуля только времени-подобная компонента. Это оправдывает общепринятый в классической механике термин собственной системы (отсчета).

5. Рассмотрим преобразования параметров из группы $SU(2)$, не выводящие из используемой (собственной) системы отношений. В общем случае они характеризуются (4.2.17). Подставляя их в (5.1.4), находим для Ψ'

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 & 0 & 0 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ 0 & 0 & -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{5.4.8}$$

т. е. при преобразованиях из группы $SU(2)$ контравариантные компоненты спинора i^s и ковариантные компоненты сопряженного спинора β_s преобразуются одинаково. Это обстоятельство лишний раз свидетельствует в пользу записи Ψ через два типа спиноров разной ковариантности.

6. Из параметров элементов i^s и β_s можно образовать две комбинации:

$$W(+)^s = i^s + \beta_s; \quad W(-)^s = i^s - \beta_s, \tag{5.4.9}$$

которые при $SU(2)$ — преобразованиях изменяются независимо друг от друга.

В ряде работ по квантовой электродинамике вводится вспомогательная 4-компонентная величина

$$\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W(+)^s \\ W(-)^s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i^s + \beta_s \\ i^s - \beta_s \end{pmatrix}, \tag{5.4.10}$$

обладающая тем свойством, что в собственной системе отношений для частицы и античастицы соответственно принимает вид

$$\psi_{(1)} = \begin{pmatrix} i^1_{(o)} \\ i^2_{(o)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \psi_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i^1_{(o)} \\ i^2_{(o)} \end{pmatrix}. \tag{5.4.11}$$

Таким образом, в собственной системе отношений четыре компоненты можно сопоставить двум видам частиц с двумя возможными проекциями спинов.

7. Рассмотрим компоненты введенных выше тензоров в собственной системе отношений. Так, компоненты тензора $\overline{\Psi}_{(o)}\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi_{(o)}$ находятся в виде

$$\overline{\Psi}_{(o)}\gamma^0\gamma^i\Psi_{(o)} = 0; \tag{5.4.12}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_{(o)}\gamma^1\gamma^2\Psi_{(o)} &= \pm 2i\left(i^1_{(o)}i^{*1}_{(o)} - i^2_{(o)}i^{*2}_{(o)}\right) \equiv -\frac{4i\tilde{e}}{\hbar}M_{3(o)};\\
\overline{\Psi}_{(o)}\gamma^2\gamma^3\Psi_{(o)} &= \pm 2i\left(i^1_{(o)}i^{*2}_{(o)} + i^2_{(o)}i^{*1}_{(o)}\right) \equiv -\frac{4i\tilde{e}}{\hbar}M_{1(o)};\\
\overline{\Psi}_{(o)}\gamma^3\gamma^1\Psi_{(o)} &= \mp 2\left(i^1_{(o)}i^{*2}_{(o)} - i^2_{(o)}i^{*1}_{(o)}\right) \equiv -\frac{4i\tilde{e}}{\hbar}M_{2(o)},
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

где в (5.4.13) справа введены 3-мерные обозначения:

$$M_j = \frac{i}{8}\left(\frac{\hbar}{\tilde{e}}\right)\varepsilon_{jik}\overline{\Psi}\gamma^i\gamma^k\Psi. \tag{5.4.14}$$

Здесь ε_{jik} — 3-мерный символ Леви-Чивиты.

8. Два числа $i^1_{(o)}$ и $i^2_{(o)}$, определяющие $\Psi_{(o)}$, можно связать с понятием *спина частицы.* Легко убедиться, что в случае обращения в нуль $i^2_{(o)}$ или $i^1_{(o)}$ имеем $M_{1(o)} = M_{2(o)} = 0$, тогда как третья компонента принимает значения:

$$M_{3(o)} = \mp\frac{1}{2}\hbar. \tag{5.4.15}$$

Это можно трактовать как выражения для значений двух возможных проекций спина частиц на направление оси x^3.

5.5. Прообраз уравнений Дирака

1. Перейдем к описанию частиц в произвольных системах отношений. Для этого учтем, что при преобразованиях 2-компонентных спиноров, описываемых эрмитовыми матрицами (4.2.20), компоненты биспинора Ψ' из (5.1.4) изменяются по закону

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & 0 & 0 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 - b_3 & -b_1 + ib_2 \\ 0 & 0 & -b_1 - ib_2 & b_0 + b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{5.5.1}$$

где пары верхних и нижних компонент столбца преобразуются по-разному. Это приводит к тому, что введенные в (5.4.10) величины в произвольной системе отношений перемешиваются и будут иметь отличными от нуля все четыре компоненты.

2. Отдельно выпишем закон преобразований (5.5.1) для двух верхних и двух нижних компонент, положив, что компоненты справа характеризуют частицу в собственной системе отношений:

$$\begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_0 + b_3) i^1_{(o)} + (b_1 - i b_2) i^2_{(o)} \\ (b_1 + i b_2) i^1_{(o)} + (b_0 - b_3) i^2_{(o)} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{\dot 1} \\ \beta_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_0 - b_3) i^1_{(o)} - (b_1 - i b_2) i^2_{(o)} \\ -(b_1 + i b_2) i^1_{(o)} + (b_0 + b_3) i^2_{(o)} \end{pmatrix}. \tag{5.5.2}$$

3. Поскольку компоненты $i^s_{(o)}$ и $\beta^{\dot r}_{(o)}$ связаны в собственной системе отношений, согласно (5.4.4), то естественно полагать, что они будут связаны и в произвольной системе отношений. Вместе с тем, эта связь имеет иной вид. Чтобы ее найти запишем соотношение между двумя парами компонент β_s и i^s, входящими в определение столбца Ψ, в ковариантном (спинтензорном) виде:

$$\beta_{\dot r} = K_{\dot r s} i^s \to \begin{pmatrix} \beta_{\dot 1} \\ \beta_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\dot 1 1} & K_{\dot 1 2} \\ K_{\dot 2 1} & K_{\dot 2 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}. \tag{5.5.3}$$

Пользуясь связью (5.5.3), следует найти комплексные компоненты матрицы $K_{\dot r s}$.

4. Подставляя в (5.5.3) выражения (5.5.2), получаем два комплексных соотношения. В каждом из них приравняем слева и справа коэффициенты отдельно при параметрах $i^1_{(o)}$ и $i^2_{(o)}$. В итоге получаем четыре уравнения для четырех компонент

$$\begin{aligned} &K_{\dot 1 1}(b_0 + b_3) + K_{\dot 1 2}(b_1 + i b_2) = b_0 - b_3; \\ &K_{\dot 1 1}(b_1 - i b_2) + K_{\dot 1 2}(b_0 - b_3) = -(b_1 - i b_2); \\ &K_{\dot 2 1}(b_0 + b_3) + K_{\dot 2 2}(b_1 + i b_2) = -(b_1 + i b_2); \\ &K_{\dot 2 1}(b_1 - i b_2) + K_{\dot 2 2}(b_0 - b_3) = b_0 + b_3. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Детерминант Δ этого уравнения, согласно (4.2.21),

$$\Delta = \left(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 \right)^2 = 1. \tag{5.5.5}$$

5. Решение уравнений (5.5.4) находится в виде

$$\begin{pmatrix} K_{\dot{1}1} & K_{\dot{1}2} \\ K_{\dot{2}1} & K_{\dot{2}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2b_2(b_0-b_3) & -2b_0(b_1-ib_2) \\ -2b_0(b_1+ib_2) & -1+2b_0(b_0+b_3) \end{pmatrix} \equiv \sigma^{\mu}_{(-)}u_{\mu}, \tag{5.5.6}$$

где $\sigma^{\mu}_{(-)} = \{I_2, -\sigma^i\}$ – набор из четырех 2-рядных матриц, а четыре компоненты u_{μ} означают

$$u_0 = 2b_0^2 - 1; \quad u_i = 2b_0 b_i. \tag{5.5.7}$$

Легко убедиться, что компоненты u_{μ} обладают свойством

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1. \tag{5.5.8}$$

С учетом этих выражений соотношение (5.5.3) можно представить в виде

$$\beta_{\dot{r}} = K_{\dot{r}s}i^s \to \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0-u_3 & -u_1+iu_2 \\ -u_1-iu_2 & u_0+u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}. \tag{5.5.9}$$

6. Для частного случая псевдоповорота вокруг первой оси имеем

$$\begin{aligned} u_0 &= \cosh\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \\ u_1 &= \sinh\theta_1 = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad u_2 = u_3 = 0. \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

Эти формулы позволяют интерпретировать u_{μ} как компоненты 4-скорости собственной системы отношений частицы (т. е. ее самой) относительно используемой системы отношений.

7. Вводя 2-компонентные столбцы

$$\Psi_1 \equiv \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}; \quad \Psi_2 \equiv \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix}, \tag{5.5.11}$$

имеем

$$\Psi_2 = \sigma^{\mu}_{(-)} u_\mu \Psi_1 \to \sigma^{\mu}_{(-)} u_\mu \Psi_1 - \Psi_2 = 0. \tag{5.5.12}$$

8. Совершенно аналогично можно найти коэффициенты $K^{s\dot{r}}$ для обратного к (5.5.3) соотношения

$$i^s = K^{s\dot{r}} \beta_{\dot{r}} \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{1\dot{1}} & K^{1\dot{2}} \\ K^{2\dot{1}} & K^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix}. \tag{5.5.13}$$

Подставляя сюда выражения (5.5.2) и расписывая уравнения типа (5.5.4), находим

$$\begin{pmatrix} K^{1\dot{1}} & K^{1\dot{2}} \\ K^{2\dot{1}} & K^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2b_0(b_0 + b_3) & 2b_0(b_1 - ib_2) \\ 2b_0(b_1 + ib_2) & -1 + 2b_0(b_0 - b_3) \end{pmatrix} \equiv \sigma^{\mu}_{(+)} u_\mu, \tag{5.5.14}$$

где $\sigma^{\mu}_{(+)} = \{I_2, +\sigma^i\}$. Отсюда получаем

$$\Psi_1 = \sigma^{\mu}_{(+)} u_\mu \Psi_2 \to \sigma^{\mu}_{(+)} u_\mu \Psi_2 - \Psi_1 = 0. \tag{5.5.15}$$

9. Объединим 2-компонентные соотношения (5.5.12) и (5.5.15) в одно 4-компонентное выражение. Вспоминая представления матриц Дирака, имеем

$$u_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{(+)} \\ \sigma^{\mu}_{(-)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = 0 \to$$

$$\left(\gamma^\mu u_\mu + 1\right) \Psi = 0. \tag{5.5.16}$$

Заметим, что использование второй возможной связи двух элементов, образующих античастицу, согласно (5.4.5), приводит к тому же уравнению (5.5.16), но со знаком минус перед вторым слагаемым.

10. В полученное выражение можно ввести массу покоя m_0 элементарной частицы, формально умножая (5.5.16) на коэффициент $m_0 c$:

$$\left(\gamma^\mu p_\mu + m_0 c\right)\Psi = 0. \tag{5.5.17}$$

где введено общепринятое обозначение для импульса

$$p_\mu \equiv m_0 c u_\mu. \tag{5.5.18}$$

Здесь c имеет смысл скорости света. Очевидно, вводимый коэффициент (масса на скорость света) может принимать произвольные значения. В итоге формально получаем алгебраический аналог уравнения Дирака в импульсном пространстве.

11. Умножив (5.5.16) слева на матрицу $\gamma^\mu u_\mu - 1$, получаем

$$\left(\eta^{\mu\nu} u_\mu u_\nu - 1\right)\Psi = 0 \to \left(\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{bmatrix} - 1\right)\Psi = 0, \tag{5.5.19}$$

что с точностью до постоянного коэффициента соответствует *уравнению Клейна–Фока* в импульсном пространстве, или, что эквивалентно, известному релятивистскому соотношению между компонентами 4-скорости (4-импульса) частицы.

12. Отметим, что здесь пока еще не было дифференциальных уравнений движения, тем не менее, опираясь на изложенный материал, можно взглянуть на смысл уравнений Дирака под новым углом зрения. Чтобы перейти от прообраза к общепринятым уравнениям Дирака в координатном представлении следует учесть следующие обстоятельства.

1) Прежде всего, следует учесть, что в 4-компонентных выражениях, обозначаемых через Ψ, записывались не биспинорные функции, а лишь наборы из четырех *комплексных чисел*, определенных относительно элементарного базиса

БСКО ранга (3,3). Для получения из этих чисел биспинорной *функции* следует, во-первых, перейти от элементарного базиса к макроприбору, образованному из огромной системы элементарных базисов. А во-вторых, — ввести координатное пространство-время, чего пока сделано не было. Имеется еще ряд факторов, о которых будет сказано позже.

2) Уравнения Дирака в координатном представлении являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Необходимо указать истоки возникновения дифференцирований.
3) Физический интерес представляют уравнения Дирака для взаимодействующих частиц, тогда как пока речь шла об идеализированных свободных частицах.
4) В прообразе уравнений (5.5.16) отсутствует значение массы частиц. Пока в рамках БСКО вообще не обсуждался вопрос о происхождении масс частиц.

Решение названных и ряда других проблем обсуждается в следующей книге данной серии.

5.6. Бинарная геометрофизика и квантовая теория

В связи с изложенным в этой главе, следует напомнить, что в годы создания квантовой механики серьезно обсуждался вопрос о возможности описания квантовых закономерностей на основе измененных представлений о пространстве-времени. Так, один из создателей квантовой механики Л. де Бройль в 1920-е годы писал: «Понятия пространства и времени взяты из нашего повседневного опыта и справедливы лишь для явлений большого масштаба. Нужно было заменить их другими понятиями, играющими фундаментальную роль в микропроцессах, которые бы асимптотически переходили при переходе от элементарных процессов к наблюдаемым явлениям обычного масштаба в привычные понятия пространства и времени. Стоит ли говорить, что это очень трудная задача? Было бы удивительно, если бы оказалось возможным когда-нибудь исключить из физической теории понятия, представляющие самую основу нашей повседневной жизни. Правда, история науки показывает удивительную плодотворность человеческой мысли и не стоит терять надежды. Однако пока мы не добились успеха в распространении наших представлений в указанном направлении, мы должны с большими или меньшими трудностями втиснуть микроскопические явления в рамки понятий пространства и времени, хотя нас все время будет беспокоить чувство, что мы пытаемся втиснуть алмаз в оправу, которая ему не подходит» [3]. Близкие мысли в 1930-е годы высказывал М. П. Бронштейн и некоторые другие физики-теоретики. Несомненно, здесь сказывался опыт создания общей теории относительности, где гравитационное взаимодействие оказалось обусловленным искривлением пространства-времени.

Однако квантовая теория была разработана иначе, на основе сохраненных представлений о классическом пространстве-времени. Как уже неоднократно подчеркивалось, современная квантовая механика и квантовая теория поля построены в рамках *дуалистической теоретико-полевой парадигмы*. Это означает, что в ней одной из двух ключевых категорий является априорно заданное классическое пространство-время, а в качестве другой — выступает поле амплитуды вероятности (как самих фермионных частиц, так и бозонных полей переносчиков взаимодействий). Другими словами, в стандартном изложении квантовая механика не претендует на изменение свойств классического пространства-времени. Поля микрочастиц и пере-

[3] *Бройль Л. де.* Революция в физике. М.: Госатомиздат, 1963. С. 187.

носчиков взаимодействий вкладываются в априорно заданное пространство-время.

Годы, прошедшие со времени формирования квантовой теории, свидетельствуют о том, что тревожное чувство, о котором писал де Бройль, беспокоило не только его, но и многих других физиков XX века. Более того, со всей определенностью можно утверждать, что оно не оставляет исследователей в покое и по сей день. Об этом свидетельствуют многочисленные дискуссии и труды по интерпретации квантовой теории.

В связи с этим, уместно вспомнить позицию А. Пуанкаре, который еще до создания общей теории относительности говорил, что можно использовать любую геометрию, но при этом должны соответствующим ей образом формулироваться физические законы. Фактически речь шла о принципе дополнительности геометрических представлений и способов описания физических закономерностей. Именно в этом ключе следует понимать, с одной стороны, надежды де Бройля и Бронштейна на возможность более естественного описания квантовой механики в рамках некой новой геометрии и, с другой стороны, — сложившуюся на сегодняшний день квантовую теорию в рамках классических пространственно-временных представлений.

Реляционный подход фактически возвращает нас к ожиданиям де Бройля, Бронштейна и некоторых других физиков и представить квантовомеханические закономерности в рамках новой, бинарной геометрии, где нет заранее заданного классического пространственно-временного фона и поэтому бессмысленно понятие поля, через свойства которого в общепринятой теории удалось сформулировать квантовомеханические закономерности. Вместо унарной геометрии предлагается использовать более элементарную бинарную геометрию, описывающую комплексные отношения между состояниями материальных объектов. В реляционном подходе **заранее не закладываются классические пространственно-временные**

отношения, а ставится задача их вывода из более первичных комплексных отношений параллельно с формированием квантовомеханических закономерностей. Таким образом, в реляционном миропонимании мы фактически обращаемся к идеям, высказанным на заре создания квантовой механики.

Глава 6

Истоки понятия длины (метрики)

- Бинарная система комплексных отношений ранга (2,2)
- Физический смысл БСКО ранга (2,2)
- Композиция БСКО рангов (3,3) и (2,2)
- Две формы БСКО ранга (2,2)
- Переход к 1-мерной унарной геометрии
- Роль фазы в построении геометрии

До сих пор рассматривались общие свойства характеристик массивных частиц в рамках БСКО ранга (3,3), которые можно трактовать как соотношения в импульсном пространстве (в пространстве скоростей). Понятие координатного пространства нигде не использовалось. Развиваемая здесь теория нацелена на его вывод, а чтобы это сделать прежде всего необходимо указать истоки возникновения метрических отношений, проще говоря, понятия длины, или интервала.

Эта проблема уже давно была четко поставлена в знаменитом мемуаре Б. Римана, где он писал: «Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, — понятия твердого тела и светового луча, — повидимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям». Далее он писал: «что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное» [1].

Вслед за Риманом над этой проблемой задумывались многие физики, в частности, А. Л. Зельманов писал: «Вся современная физика явно или неявно пользуется метрической геометрией. Что такое метрическая геометрия? Это геометрия, в которой основным понятием служит понятие длины. И поскольку понятие длины — понятие основное, оно не подлежит определению в рамках метрической геометрии. Если физика пользуется метрической геометрией, значит понятие длины (а поскольку мы говорим о физике, но не только понятие длины, но и понятие промежутка времени) принадлежит к основным физическим понятиям, не подлежащим определению» [2].

В теории будущего, по мнению Зельманова, придется отойти от ряда привычных свойств классического пространства-времени. «По-видимому, первое представление, от которого придется отказаться, это представление о метричности пространства и времени в глубоком микромире и при очень высо-

---

[1] *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии // «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 32.

[2] *Зельманов А. Л.* Некоторые вопросы космологии и теории гравитации // «Физическая наука и философия». М.: Наука, 1973. С. 278.

кой плотности»[3]. Согласно его пониманию, «будущая физическая теория будет аметрической или полиметрической», а «ее наиболее общие уравнения не будут дифференциальными». Заметим, что бинарная геометрофизика опирается на алгебраические законы и соотношения.

Над аналогичной проблемой размышлял физик-гравитационист А. Е. Левашев, ссылавшийся на поставленный Г. Вейлем в 1927 году вопрос: «Как понимать существующие в пространстве отношения мер и длин?» Неоднократно он упоминал и приведенные выше слова Б. Римана из мемуара «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Имея все это в виду, Левашев пытался построить дискретную геометрию и с этой целью стремился найти соответствующую ей новую аксиоматику. Особо его интересовал вопрос об описании причинности в дискретной геометрии.

Можно назвать и других физиков, в частности, профессора А. А. Власова.

В настоящей главе показывается, что ответственными за возникновение классической метрики являются фазовые вклады, описываемые параметрами БСКО минимального ранга (2,2).

6.1. Бинарная система комплексных отношений ранга (2,2)

1. Закон БСКО ранга (3,3) в (4.2.1) позволяет перейти от одного набора параметров элементов к другому согласно соотношениям:

$$\begin{gathered} i^s \to \tilde{i}^s = C_i i^s; \quad k^s \to \tilde{k}^s = C_k k^s; \quad j^s \to \tilde{j}^s = C_j j^s; \\ \alpha^s \to \tilde{\alpha}^s = C_\alpha \alpha^s; \quad \beta^s \to \tilde{\beta}^s = C_\beta \beta^s; \quad \gamma^s \to \tilde{\gamma}^s = C_\gamma \gamma^s, \end{gathered} \tag{6.1.1}$$

[3] *Зельманов А. Л.* Некоторые вопросы космологии и теории гравитации // «Физическая наука и философия». М.: Наука, 1973. С. 279.

так что, например,

$$\tilde{u}_{i\alpha} = \tilde{i}^1 \tilde{\alpha}^1 + \tilde{i}^2 \tilde{\alpha}^2 = C_i C_\alpha u_{i\alpha}, \qquad (6.1.2)$$

где $C_i, \ldots, C_\gamma$ — произвольные комплексные числа, сопоставляемые соответствующим элементам. Действительно, для новых параметров закон БСКО ранга (3,3) можно переписать в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{i\alpha} & \tilde{u}_{i\beta} & \tilde{u}_{i\gamma} \\ \tilde{u}_{k\alpha} & \tilde{u}_{k\beta} & \tilde{u}_{k\gamma} \\ \tilde{u}_{j\alpha} & \tilde{u}_{j\beta} & \tilde{u}_{j\gamma} \end{vmatrix} = C_i C_k C_j C_\alpha C_\beta C_\gamma \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.1.3)$$

Закон выполняется, если он имеет место для прежних параметров.

2. Легко убедиться, что из комплексных коэффициентов конформного преобразования типа C_i и C_α можно образовать новые (комплексные) парные отношения между элементами вида

$$\hat{u}_{i\alpha} = C_i C_\alpha \equiv \hat{i}^1 \hat{\alpha}^1, \qquad (6.1.4)$$

для которых, очевидно, будет выполняться самостоятельный закон

$$\Phi_{(2,2)} = \begin{vmatrix} \hat{u}_{i\alpha} & \hat{u}_{i\beta} \\ \hat{u}_{k\alpha} & \hat{u}_{k\beta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (6.1.5)$$

аналогичный закону (4.2.1), но еще меньшего ранга (2,2). Таким образом, закон БСКО ранга (3,3), названный ранее по некоторым признакам минимальным (как закон первого невырожденного ранга), допускает существование еще одного закона: закона самого малого ранга (2,2). БСКО ранга (2,2) можно рассматривать как подсистему БСКО ранга (3,3) по аналогии с тем, как в теории групп имеются подгруппы более общих групп.

3. Введенную подсистему БСКО ранга (2,2) необходимо согласовать с ранее наложенными условиями на исходную БСКО ранга (3,3). Начнем с условий связи «по вертикали» (4.1.5) и рассмотрим, как они отражаются на значениях коэффициентов $C_i, \dots, C_\gamma$ в БСКО ранга (2,2). Если потребовать, чтобы новые параметры (с тильдой) после конформных преобразований по-прежнему удовлетворяли этим условиям комплексной сопряженности, то будем иметь

$$\tilde{i}^s = (\tilde{\alpha}^s)^* \to C_i = \overset{*}{C}_\alpha; \quad \tilde{k}^s = (\tilde{\beta}^s)^* \to C_k = \overset{*}{C}_\beta; \quad \dots . \tag{6.1.6}$$

4. Положим также, что парные отношения для связанных элементов (в теории БСКО ранга (3,3)) при преобразованиях (6.1.1) не меняются, тогда из (4.2.2) и (6.1.1) следует

$$C_i C_\alpha = C_i \overset{*}{C}_i = 1; \quad C_k C_\beta = C_k \overset{*}{C}_k = 1; \quad \dots , \tag{6.1.7}$$

т. е. параметры C_i, ..., C_γ являются комплексными числами *с модулем, равным единице*:

$$C_i = e^{i\varphi_i}; \quad C_\alpha = e^{-i\varphi_i}; \quad C_k = e^{i\varphi_k}; \quad \dots , \tag{6.1.8}$$

где φ_i, ... — вещественные числа.

5. Потребуем, чтобы условия (5.3.2) (или (5.3.3)), накладываемые на элементы, описывающие частицу (античастицу), по-прежнему удовлетворялись. Это означает

$$\tilde{i}^1 \tilde{k}^2 - \tilde{i}^2 \tilde{k}^1 = \tilde{e} C_i C_k \to C_i C_k = 1. \tag{6.1.9}$$

С учетом (6.1.8) отсюда получаем, что коэффициенты при параметрах одноименных элементов связаны между собой условиями:

$$C_i = \overset{*}{C}_k = e^{i\varphi_i}; \quad C_\alpha = \overset{*}{C}_\beta = e^{i\varphi_\alpha} = e^{-i\varphi_i}. \tag{6.1.10}$$

При этих условиях 4-компонентные величины, определенные в (5.1.3), приобретают общие экспоненциальные множители:

$$\Psi \to \Psi e^{i\varphi}; \quad \Psi^{\dagger} \to \Psi^{\dagger} e^{-i\varphi}. \tag{6.1.11}$$

6.2. Физический смысл БСКО ранга (2,2)

1. Поскольку в предыдущей главе было показано, что от БСКО ранга (3,3) естественным образом осуществляется переход к унарной геометрии Лобачевского, то следует считать, что этой системой отношений описываются отношения в пространстве скоростей или в импульсном пространстве. Исходя из происхождения БСКО ранга (2,2) как подсистемы БСКО ранга (3,3) с данной здесь интерпретацией, естественно предположить, что конформный фактор (6.1.10) при параметрах элементов, определяющих 4-скорость (ток или импульс) частицы содержит в себе значение импульса. Поскольку показатель экспоненты является скаляром, то необходимо ввести четверку коэффициентов x^{μ}, с помощью которых можно образовать скаляр:

$$\varphi_i = \frac{1}{\hbar} p_{\mu} x^{\mu}_{(i)}; \quad \varphi_k = \frac{1}{\hbar} p_{\mu} x^{\mu}_{(k)}. \tag{6.2.1}$$

Для сохранения инвариантности показателя экспоненты при преобразованиях Лоренца введенные коэффициенты x^{μ} должны преобразовываться как компоненты 4-мерного вектора:

$$p'_{\mu} = L^{\nu}_{\mu} p_{\nu} \ \to \ x'^{\mu} = L^{\mu}_{\lambda} x^{\lambda}, \tag{6.2.2}$$

где L^{μ}_{ν} — коэффициенты преобразований вектора, определенные в (4.4.8).

2. Особо подчеркнем, что выражения (6.2.1) являются определениями величин x^{μ}, сопоставляемых импульсу. Ясно, что одного соотношения вида (6.2.1) недостаточно для определения всех четырех компонент x^{μ}, поэтому необходимы дополнительные условия.

Особое внимание следует обратить на то, что фаза экспоненты компактифицирована, т. е. определена с точностью до $2\pi n$. **Переход от компактифицированных величин к классическим (некомпактифицированным) представляет собой главную проблему построения классических пространственно-временных отношений из фазовых вкладов.**

3. Следует особо подчеркнуть, что для *взаимодействующих* частиц условия комплексного сопряжения (4.1.5) параметров элементов в начальных и в конечных состояниях БСКО ранга (3,3) в общем случае должны быть обобщены, тогда как условия комплексного сопряжения параметров «сшитых» элементов (6.1.10) БСКО ранга (2,2) имеют абсолютный характер.

4. Представленное в (6.2.1) выражение для параметров БСКО ранга (2,2) позволяет интерпретировать экспоненциальный фактор через классическое действие рассматриваемой частицы. Это означает, что между любыми двумя разноименными элементами $\tilde{i}$ и $\tilde{\beta}$ БСКО ранга (2,2) можно определить парное отношение

$$u_{\tilde{i}\tilde{\beta}} = C_i C_\alpha. \tag{6.2.3}$$

Подставляя в него экспоненты с показателями в виде действия, находим, что парное отношение характеризуется разностью значений действия между двумя событиями

$$u_{\tilde{i}\tilde{\beta}} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S_{\tilde{i}} - S_{\tilde{k}})\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ik}\right], \tag{6.2.4}$$

где вместо фазы (действия) элемента $\tilde{\beta}$ записана фаза (действие) сопряженного ему элемента $\tilde{k}$, для которого

$$S_{\tilde{k}} = -S_{\tilde{\beta}}; \quad S_{\tilde{i}\tilde{k}} = S_{\tilde{i}} - S_{\tilde{k}}. \tag{6.2.5}$$

Поскольку в экспоненте записана размерная величина — действие S, — то в знаменатель введена константа такой же размерности. Помня неоднократно проводившиеся аналогии с квантовой механикой, естественно полагать, что такая константа имеет смысл постоянной Планка.

6.3. Композиция БСКО рангов (3,3) и (2,2)

Уже неоднократно подчеркивалось, что одним из стимулов развития бинарной геометрофизики являлось построение такого прообраза пространственно-временных отношений, в основания которого были бы заложены как двоичность прошлого и будущего (во времени), так и двоичность внутренней структуры частиц. БСКО ранга (3,3) вместе со своей подсистемой БСКО ранга (2,2) позволяет реализовать этот замысел, причем оказывается, что первый вид двойственности соответствует импульсному представлению в квантовой теории, а второй тип – образует прообраз координатного представления.

1. В изложенном выше важную роль играло выделение из БСКО ранга (3,3) бинарной подсистемы ранга (2,2). Однако на это можно посмотреть с другой стороны, – как на развитие теории на основе своеобразной композиции двух БСКО рангов (2,2) и (3,3). Эти две БСКО имеют принципиально различную физическую интерпретацию и играют качественно различную роль в построении фундамента физического мироздания.

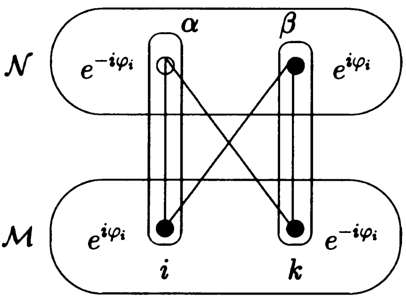
БСКО ранга (3,3) описывает элементарный акт перехода физической системы (совокупности различных частиц) из одного состояния в другое, однако при этом существенную роль играют условия связи элементов в каждом из двух множеств, т. е. связи «по горизонтали» в каждый момент времени. БСКО ранга (2,2) также описывают эволюцию соответствующей частицы, характеризуя связь элементов физической системы «по вертикали».

2. Поясним сказанное более подробно. Так, ранее записанное соотношение (6.1.10) следует понимать как условие

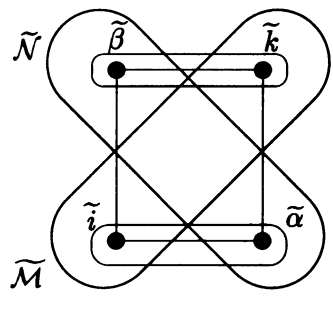
нахождения элементов противоположных множеств данной БСКО ранга (2,2) в парах «по вертикали», родственное условиям комплексного сопряжения (4.1.5) для элементов БСКО ранга (3,3). Это означает, что элементы i и k из одного множества $\mathcal{M}$ БСКО ранга (3,3) (так же, как α и β из $\mathcal{N}$) следует отнести к разным множествам $\tilde{\mathcal{M}}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ БСКО ранга (2,2).

Тогда следует полагать, что находящиеся в парах «по вертикали» разноименные элементы двух множеств БСКО ранга (3,3) относятся к разным множествам БСКО ранга (2,2). В частности, для элементов, изображенных на рис. 6.1, элемент α может быть отнесен к множеству $\tilde{\mathcal{N}}$, а элемент β – к множеству $\tilde{\mathcal{M}}$ БСКО ранга (2,2).

Формулы (4.1.5) и (6.1.10) пояснены на рис. 6.1 *а*, где изображены четыре элемента, описывающие идеализированную свободную частицу в начальном и конечном состояниях.



а) БСКО ранга (3,3)



б) БСКО ранга (2,2)

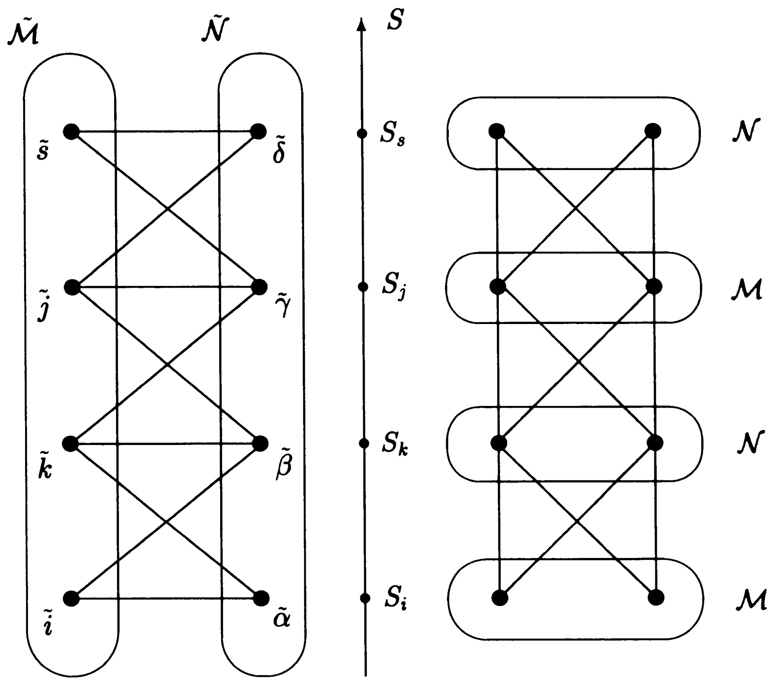
Рис. 6.1. Сопоставление пар множеств двух БСКО рангов (3,3) и (2,2)

Показано, что допустимые единичные по модулю коэффициенты совпадают у перекрестных элементов.

Присвоим всем элементам второй символ (с тильдой), характеризующий их принадлежность к одному из двух множеств БСКО ранга (2,2). Для изображенных на рис. 6.1 элементов это означает

$$i \to \tilde{i}; \quad k \to \tilde{\alpha}; \quad \alpha \to \tilde{\beta}; \quad \beta \to \tilde{k}. \tag{6.3.1}$$

Согласно (6.1.10), элементы $\tilde{i}$ и $\tilde{\alpha}$, $\tilde{k}$ и $\tilde{\beta}$ следует считать «сшитыми» друг с другом. Иными словами, элементы БСКО ранга (3,3), находящиеся в парах с точки зрения этой же БСКО, являются элементами разных множеств с точки зрения БСКО ранга (2,2), и, наоборот, элементы БСКО ранга (2,2), находящиеся в парах, с точки зрения этой же БСКО,



а) БСКО ранга (2,2) *б*) БСКО ранга (3,3)

Рис. 6.2. Развертка в мировую историю процессов, описываемая БСКО ранга (2,2) являются элементами одного и того же множества с точки зрения БСКО ранга (3,3) (см. рис. 6.1 *б*).

Таким образом, четверка разноименных элементов, описывающих начальное и конечное состояние одной и той же частицы, оказывается, если можно так сказать, «зашнурованной» как «по горизонтали», так и «по вертикали» двумя БСКО рангов (3,3) и (2,2). Разделение двух элементов массивной частицы на левые и правые компоненты оказывается тесно связанным с наличием БСКО ранга (2,2), то есть левые и правые компоненты описываются элементами разных множеств БСКО ранга (2,2).

На рис. 6.2 проиллюстрирована эволюция частицы, с одной стороны, через БСКО ранга (2,2) (рис. 6.2 *а*), а с другой, — через последовательность элементарных актов, описываемых БСКО ранга (3,3) (рис. 6.2 *б*). Однотипные элементы двух множеств БСКО ранга (2,2) на правом рисунке чередуются, занимая последовательно левое и правое положение, как бы обвивая вертикаль двумя противоположно закручивающимися лентами.

6.4. Две формы БСКО ранга (2,2)

1. БСКО ранга (2,2), в отличие от БСКО ранга (3,3) и более высоких рангов, является **вырожденной** в том смысле, что представляется в двух эквивалентных видах. Чтобы это показать, перепишем закон (6.1.5) в форме

$$\hat{u}_{i\alpha}\hat{u}_{k\beta} = \hat{u}_{k\alpha}\hat{u}_{i\beta}$$

и прологарифмируем его. В итоге будем иметь

$$\ln\hat{u}_{i\alpha} + \ln\hat{u}_{k\beta} - \ln\hat{u}_{k\alpha} - \ln\hat{u}_{k\beta} = 0 \rightarrow a_{i\alpha} + a_{k\beta} - a_{k\alpha} - a_{i\beta} = 0, \quad (6.4.1)$$

где введены обозначения:

$$Ca_{i\alpha} = \ln\hat{u}_{i\alpha}; \quad Ca_{k\beta} = \ln\hat{u}_{k\beta}; \ldots . \quad (6.4.2)$$

Здесь C — произвольная универсальная константа. Учитывая вид $\hat{u}_{i\alpha}$, т. е. (6.1.4), приходим к представлению $a_{i\alpha}$ через новые параметры:

$$a_{i\alpha} = \frac{1}{C}(\ln \hat{i}^1 + \ln \hat{\alpha}^1) \equiv \tilde{i}_0 + \tilde{\alpha}_0, \qquad (6.4.3)$$

где

$$\tilde{i}_0 = \frac{1}{C}\ln \hat{i}^1; \quad \tilde{\alpha}_0 = \frac{1}{C}\ln \hat{\alpha}^1.$$

2. Соотношение (6.4.1) для новых параметров может быть переписано в форме

$$\tilde{\Phi}_{(2,2;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (6.4.4)$$

соответствующей закону бинарных систем отношений ранга (2, 2; а), приведенному в (3.3.3). Для ранга этого закона сохраним прежнее обозначение (2, 2; а).

3. Таким образом, БСКО ранга (2,2) записывается в двух формах. В первой форме записи закона (6.1.5) параметры элементов характеризуются экспонентами с мнимым показателем и действие представляется в мультипликативной записи (6.2.4), а во второй форме записи (6.4.4) параметры характеризуются непосредственно через действие с аддитивным определением (6.2.5). Если взять три пары таких элементов, то легко видеть, что для унарных отношений между ними имеет место мультипликативное свойство экспоненциальных факторов

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ij}\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ik}\right] \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{kj}\right], \qquad (6.4.5)$$

соответствующее аддитивности действия.

Таким образом, можно утверждать, что *две формы БСКО минимального ранга соответствуют двум аспектам теории: квантовому (БСКО ранга (2,2) и классическому (БСКО ранга* (2, 2; a).

6.5. Переход к 1-мерной унарной геометрии

1. Произведем переход от БСКО ранга (2, 2; a) к УСВО ранга (3). Для этого, прежде всего, следует определить условия «сшивки» двух элементов БСВО в один элемент УСВО. Их можно найти из условий образования элементарной частицы из двух элементов (условия связи по горизонтали) (6.1.10). Элементы из двух множеств: $\tilde{i}$ и $\tilde{\alpha}$, $\tilde{k}$ и $\tilde{\beta}$, $\tilde{j}$ и $\tilde{\gamma}$, ... будем считвть связанными (или «сшитыми»), если их параметры удовлетворяют условиям:

$$\tilde{i}_0 = -\tilde{\alpha}_0; \quad \tilde{k}_0 = -\tilde{\beta}_0; \quad \tilde{j}_0 = -\tilde{\gamma}_0; \quad \ldots . \tag{6.5.1}$$

2. Определим отношения между «сшитыми» парами непосредственно через первичные парные отношения следующим образом

$$S_{ik} = a_{i\beta} = \tilde{i}_0 + \tilde{\beta}_0 = \tilde{i}_0 - \tilde{k}_0 = -a_{k\alpha} = -S_{ki}. \tag{6.5.2}$$

Это отношение является антисимметричным. Здесь и в дальнейшем «сшитые» пары будем помечать латинскими индексами, т. е. индексами элементов из множества $\tilde{\mathcal{M}}$.

Из данного определения следует, что парные отношения между «сшитыми» элементами обращаются в нуль

$$a_{i\alpha} = a_{k\beta} = a_{j\gamma} = \ldots = 0. \tag{6.5.3}$$

3. Рассмотрим закон (6.4.4) БСВО ранга (2, 2; a) для нескольких частных наборов элементов.

а) Пусть закон записан для двух пар «сшитых» элементов (i, α) и (k, β), тогда имеем

$$\tilde{\Phi}_{(2,2;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} \\ 1 & S_{ki} & 0 \end{vmatrix} = S_{ki} + S_{ik} = 0, \tag{6.5.4}$$

т. е. в этом случае закон означает антисимметрию парных отношений.

б) Пусть в законе (6.4.4) одна пара элементов $(\tilde{i}, \tilde{\alpha})$ «сшита», а другие два элемента $\tilde{j}$ и $\tilde{\beta}$ — нет, тогда, сопоставляя элементу $\tilde{\beta}$ четвертый, «сшитый» с ним элемент $\tilde{k}$, имеем

$$\tilde{\Phi}_{(2,2;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} \\ 1 & S_{ji} & S_{jk} \end{vmatrix} = S_{ik} + S_{kj} + S_{ji} = 0. \tag{6.5.5}$$

Это соотношение выражает известное *свойство расстояний между тремя точками на ориентированной линии.*

в) Рассмотрим третью возможность, когда в законе (6.4.4) все четыре элемента $\tilde{i}, \tilde{l}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ являются не «сшитыми». В этом случае закон с учетом перехода к унарным отношениям (6.5.2) расписывается следующим образом

$$\tilde{\Phi}_{(2,2;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{l\beta} & a_{l\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & S_{ik} & S_{ij} \\ 1 & S_{lk} & S_{lj} \end{vmatrix} = S_{ij} + S_{lk} - S_{ik} + S_{jl} = 0. \tag{6.5.6}$$

Это означает расположенность четырех точек на прямой в порядке $\tilde{i}$, $\tilde{j}$, $\tilde{l}$, $\tilde{k}$, так что сумма трех отрезков между ними равна отрезку S_{ik} между крайними точками.

4. Закон (6.5.5) БСВО ранга $(2, 2; a)$ так же, как и закон (6.5.6), соответствует закону (2.2.5) УСВО ранга $(3; b)$, записанному в форме

$$\Phi_{(3;b)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} & S_{ij} \\ 1 & S_{ki} & 0 & S_{kj} \\ 1 & S_{ji} & S_{jk} & 0 \end{vmatrix} = -(S_{ik} + S_{kj} + S_{ji})^2 = 0. \qquad (6.5.7)$$

Вид приведенных выражений подтверждает данную выше интерпретацию отношений БСВО ранга (2,2;а) через классическое действие рассматриваемых частиц или через интервалы собственного времени частицы.

6.6. Роль фазы в построении геометрии

Задачу физического обоснования метрики (расстояний) предлагается искать путем наложения огромного количества фазовых вкладов. Это означает использование идеи о макроскопической природе классического пространства-времени, которая высказывалась рядом авторов: П. К. Рашевским, Е. Циммерманом, Р. Пенроузом и др. В частности, Д. ван Данциг писал: «Можно быть склонным рассматривать метрику, как описывающую некое „нормальное“ состояние материи (включая излучение), и дать ей *статистическую* интерпретацию как некоторый вид среднего физических характеристик окружающих событий, вместо того, чтобы класть ее в основу всей физики»[4].

На важность роли фазы в раскрытии сущности геометрии обращал внимание Дж. Уилер. Приведем его достаточно про-

[4] *Dantzig D. van.* On the relation between geometry and physics and concept of space-time // Funfzig Jahre Relftivitatstheorie. Konferenz Bern, Basel. 1955. Bd. 1, S. 569.

странное высказывание: «Однако Природа умеет „вести учет“ различия „фаз“. Значит, если Природа сводится к геометрии, „фаза“ также должна быть сводима к геометрии. Однако „фаза“ не всегда отчетливо отражает чисто геометрический характер исконно единой теории поля. Не впадает ли эта теория в чрезмерную узость, используя исключительно средства *дифференциальной* геометрии – геометрии в непосредственной окрестности точки? Не является ли ее пороком невозможность признания общности между отдаленными точками? Не являются ли обычные геометрические средства непригодными потому, что они, так сказать, вводят слишком много точек и допускают различимость этих точек в качестве постулата, не подлежащего сомнению? Не существует ли какой-либо возможности отбросить подобные неудачные основы и все же сохранить существенные черты глобальной структуры? Не достаточно ли одной точки? Не может ли эта точка повторять свою роль вновь и вновь, подобно тому, как электронный луч в телевизионной трубке, пробегая достаточно быстро, воспроизводит все изображение. Не будет ли взаимная „фаза“ двух точек играть более важную роль, если между точками будет иметь место более глубокая внутренняя связь этого типа? Конечно, здесь не идет речь об *изменении* теорий Эйнштейна и Максвелла; мы лишь ищем другую *формулировку* этой теории. *Существование в основных законах классического пространства-времени величины такого типа как относительная „фаза“ двух отдельных точек приводит исследователей, ищущих чисто геометрическое описание природы, к заключению, что понятие „фазы“ еще не нашло своего наиболее удачного геометрического средства выражения*» [34, с. 61] (везде курсив Дж. Уилера).

Близкая мысль о роли «фазы» высказывалась им и в других работах, где к числу важнейших проблем физики был отнесен вопрос: «Могут ли идеи римановой геометрии и геометродинамики быть переформулированы в таком виде, чтобы концепция относительной „фазы“ двух удаленных точек приобрела простой смысл?» [34, с. 207].

Предлагаемое нами построение макроскопической теории классических пространственно-временных отношений на базе бинарной геометрофизики (предгеометрии) в значительной степени является ответом на сформулированные Дж. Уилером вопросы. При этом ключевым является понятие «фазы», причем не отдельной «фазы», а большой совокупности фазовых вкладов, из наложения которых предлагается выводить как понятие расстояния, так и всю классическую геометрию.

В приведенном высказывании Дж. Уилера особо примечательны следующие моменты. Во-первых, в нем выражено сомнение в обоснованности методов дифференциальной геометрии, основанных на «непосредственной окрестности точки». Здесь фактически ставится вопрос о возможности глобального задания фаз между удаленными точками, что означает переход к концепции дальнодействия. Эта же мысль содержится в его словах об использовании в существующей теории «слишком многих точек» пространства и в вопросе о «какой-либо возможности отбросить эти неудачные основы». Именно это осуществляется в бинарной геометрофизике, где используются не безликие точки, а события и частицы, составленные из элементов. Фазы определены лишь для пар частиц (элементов), но не для эфемерных геометрических точек, где нет реальных частиц.

Во-вторых, заслуживает внимание рассуждение Уилера о повторении роли точки вновь и вновь, из чего строится изображение, как в примере с электронно-лучевой трубкой. Это может быть соотнесено с упомянутой выше компактифицированностью прообразов координат x^μ, когда на мыслимой прямой каждый вклад повторяется вновь и вновь, а становление расстояния происходит из наложения большого числа этих вкладов. Для получения классических координат необходимо осуществить процедуру декомпактификации.

Наконец, позволим себе опереться на слова Уилера о том, «что понятие „фазы“ еще не нашло своего наиболее удачного геометрического средства выражения». На решение этой проблемы и претендует программа бинарной геометрофизики, где фазовые вклады наряду с угловыми образуют мировые матрицы парных отношений.

Однако на пути реализации данной программы возникают сложности. Как известно, в теоретико-полевом миропонимании частицы описываются волновыми пакетами, распределенными в некоторой области пространства. Сами пакеты трактуются в виде дискретного или сплошного спектра гармонических волн, различающихся длинами волн λ_s. Каждая из волн (гармоник) распределена сразу во всем пространстве. Если частицу характеризовать одной гармоникой, то она окажется пребывающей во всем пространстве равновероятно. Для локализации частицы необходимо рассмотрение именно пакета волн, так как ее положение определяется той областью готового пространства-времени, где квадрат суммарной амплитуды вероятности оказывается значительным. В классическом пределе положению частицы в окрестности какой-то точки соответствует дельта-функция как особое сложение волн, где отличный от нуля результат имеет место лишь в данной точке (в ничтожно малой ее окрестности), а во всех иных точках эта функция равна нулю.

Можно считать, что волновой пакет характеризует положение частицы относительно какого-то иного объекта, обычно выбираемого классическим. При этом речь идет о парном отношении (расстоянии) между двумя объектами, описываемом пакетом гармонических волн. Очевидно, что как само разложение волновых функций по гармоникам, так и всякое конкретное описание волнового пакета опирается на готовое пространство-время.

В бинарной геометрофизике ставится обратная задача. Полагается, что априорно заданного классического пространства-времени нет, однако имеются наборы фазовых вкладов в парные отношения между любыми парами объектов (элементов). Задача состоит в том, чтобы показать, как из огромной совокупности отдельных фазовых вкладов получить вещественные парные отношения, соответствующие классическим пространственно-временным отношениям.

Глава 7

Происхождение пространственно-временных отношений

- Атомы как фактор, ответственный за пространственно-временные отношения
- Истоки пространственно-временных отношений
- Хроногеометрия
- Система отношений римановой геометрии (на сфере)
- Композиция двух систем отношений
- Некоторые выводы и замечания

В предыдущих главах рассматривались бинарные истоки ключевых свойств геометрии классического пространства-времени). Таковыми являются БСКО ранга (3,3) и ее подсистема ранга (2,2). Было показано, что чрезвычайно важную роль в появлении метрики (расстояний, интервалов) играет переход от компактифицированных параметров БСКО ранга (2,2) к некомпактифицированным вещественным параметрам

БСВО ранга (2, 2; a). Но от истоков классической геометрии до конкретного вывода (обоснования) пространственно-временных отношений путь не близкий. Важным шагом на этом пути является осознание того, что **пространственно-временные отношения имеют место не между самими элементарными частицами, о которых выше шла речь, а между связанными системами из этих частиц**. Простейшей такой системой является атом.

Согласно бинарной геометрофизике, переход непосредственно от БСКО ранга (3,3), описывающей отношения в пространстве скоростей элементарных частиц, к совокупности из классических пространственно-временных и импульсных отношений обусловлен возникновением связанных систем из этих частиц. Как только вводятся атомы, возникает возможность процессов обмена состояниями атомов, что на общепринятом языке соответствует процессам испускания и поглощения электромагнитного излучения.

Данный вопрос более подробно рассмотрен в следующих книгах серии, где будут описаны взаимодействия с учетом принципа Маха. В этой же главе мы будем исходить из того, что уже введены связанные системы из элементарных частиц и произведена декомпактификация БСКО ранга (2,2), благодаря чему открывается путь к построению теории классических пространственно-временных отношений. При этом оказывается, что наиболее адекватным является не привычное $1 + 3$-расщепление на 1-мерное время и 3-мерное пространство, а $2 + 2$-расщепление в виде 2-мерной хроногеометрии с сигнатурой $(+-)$ и 2-мерной сферической геометрии с сигнатурой $(--)$. За первую часть (хроногеометрию) ответственна БСКО ранга (2, 2; a), а за вторую – БСКО ранга (3,3) (после выделения из нее конформной части в виде БСКО ранга (2,2). Здесь будет выведен закон УСВО ранга (6; a) для классических 4-мерных пространственно-временных отношений из названных бинарных систем отношений.

7.1. Атомы как фактор, ответственный за пространственно-временные отношения

Прежде чем выводить закон УСВО ранга (6; a), постараемся обосновать роль атомов в возникновении пространственно-временных отношений.

1. Классические пространственно-временные отношения справедливы для макрообъектов, являющихся достаточно сложными системами из атомов, молекул и т. д. Все, что мы знаем об окружающем мире, все что мы видим и ощущаем, основано на приеме и излучении электромагнитных сигналов. А это может осуществляться лишь связанными системами из элементарных частиц. Отдельные частицы типа электронов или протонов сами по себе ничего не излучают и не поглощают.

2. Связанные системы (атомы, молекулы и т. д.) состоят, как известно, из двух видов электрически заряженных частиц: электронов и протонов (атомных ядер). В современной физике этот факт излагается как дополнительное физическое положение, независимое от пространственно-временных отношений (от используемой геометрии). Однако он настолько значителен, что, имея в виду вышесказанное, невольно возникает идея рассматривать его не как нечто дополнительное к геометрии, а положить его в основу построения классических пространственно-временных представлений [1)].

3. Изложенная выше теория невырожденных БСКО наиболее проста и может лечь в основу физического мироздания. Кроме того, от нее можно осуществить переход к УСВО, причем наиболее естественно из нее получаются невырожден-

[1)] Отметим, что эта мысль, сформулированная в нашей работе [3] 1976 года, привела в дальнейшем к теории бинарных структур (систем отношений), развиваемых Ю. И. Кулаковым (об этом см. в книге [11]).

ные УСВО, однако для классических пространственно-временных отношений характерна именно вырожденная УСВО ранга (6; a). При этом оказалась востребованной и невырожденная УСВО ранга (5), описывающая отношения в пространстве скоростей. Невольно возникает вопрос: Какими дополнительными обстоятельствами обусловлены, во-первых, раздвоение УСВО и, во-вторых, вырождение одной из них?

4. Некоторый свет на поставленный вопрос проливает задача описания в рамках БСКО ранга (3,3) связанного состояния, например, из двух массивных элементарных частиц (простейшего атома водорода). Как отмечалось, каждая из двух частиц характеризуется парами элементов в любом из состояний, так что связанное состояние из двух частиц должно описываться четверками элементов в каждом состоянии, т. е. четырьмя спинорами. Однако известно, что связанная система (атом) имеет единую 4-скорость, которая описывается парой спиноров. Возникают естественные вопросы: Как из 4 спиноров строятся два спинора, характеризующие суммарную скорость? Что делается с двумя оставшимися спинорами? Следует полагать, что последние выполняют некую роль, причем эта роль должна быть особенной в виду сложной структуры нового объекта (атома). Зная, что классическое пространство состоит из базы и слоя, определяемого пространством скоростей, положим, что вторая пара спиноров соответствует базе, т. е. лежит в основе построения пространственно-временных отношений.

5. В главе 2 описан переход от невырожденной УСВО ранга (r) к вырожденной УСВО ранга $(r+1; a)$, который связан с тремя обстоятельствами:

1) векторы исходной УСВО ранга (r) сносятся в одну точку, т. е. к r элементам, соответствующим концам векторов, добавляется еще один элемент — начала векторов;

2) от нормированных векторов посредством конформных преобразований осуществляется переход к векторам с различными длинами;
3) в законе исходной УСВО ранга (r) с помощью теоремы косинусов производится переход от прежних парных отношений (скалярных произведений) к квадратам длин как самих векторов, так и векторов, связывающих концы исходных векторов.

Первый из этих факторов соответствует тому, что связанная система в начальной точке этих векторов может обмениваться своими состояниями со связанными системами, расположенными в концах векторов.

Второй фактор (длины векторов) должны быть как-то обусловлены характеристиками самих связанных состояний.

Третий фактор (теорема косинусов) ответственна за возможность обмена состояниями всех связанных систем, расположенных в концах исходных векторов.

6. В классической механике уже содержится намек на некую симметрию между координатами и импульсами. В квантовой механике эта симметрия принимает фундаментальный характер, что отражается в соотношении неопределенностей и в наличии двух типов представлений в описании квантовых систем: координатного и импульсного. Этот факт в свое время послужил основанием для постановки В. Паули и некоторыми другими физиками вопроса: Что является более первичным: координатное или импульсное представление?

В тех случая, когда возникает подобная альтернатива, как правило, ее разрешение состоит в нахождении чего-то третьего, из которого следует как первое, так и второе. В бинарной геометрофизике таким третьим выступает БСКО ранга (3,3), из которой так или иначе выводятся как пространственно-временные отношения, так и отношения в пространстве скоростей (в импульсном пространстве).

7.2. Истоки пространственно-временных отношений

Истоком пространственно-временных отношений в простейшем случае является одна из двух пар спиноров, характеризующих связанную систему из двух сортов частиц (водородоподобный атом). Факт связанности частиц сказывается на интерпретации и свойствах этих двух спиноров БСКО ранга (3,3). Причем образованный из них вектор характеризуется началом и концом, в отличие от векторов скорости частиц. Рассмотрим механизм появления пространственно-временных отношений из двух спиноров такого рода.

1. Пусть связанная система определяется биспинором из спинора s^l и коспинора $\beta_{\dot r}$. Теперь уже нет оснований для постулирования той связи между ними, о которой говорилось ранее при обсуждении структуры отдельной частицы. Достаточно знать характер этих преобразований, что отображено их индексами. Установим пространственно-временные характеристики объекта на основе их трансформационных свойств. Это означает постулирование следующего соотношения[2]:

$$s^l = x^{l\dot r}\beta_{\dot r} \equiv \begin{pmatrix} \tilde x^0 + \tilde x^3 & \tilde x^1 - i\tilde x^2 \\ \tilde x^1 + i\tilde x^2 & \tilde x^0 - \tilde x^3 \end{pmatrix} \beta_{\dot r}, \qquad (7.2.1)$$

где 2×2-матрица $x^{s\dot r} = \left\{\sigma_{(+)\mu}\tilde x^\mu\right\}$ записывается через 4 компоненты $\tilde x^\mu$, которые можно было бы назвать иными буквами, однако здесь введено обозначение, отражающее то, что они являются источником пространственно-временных отношений. Решим уравнения (7.2.1) относительно компонент $\tilde x^\mu$, зная компоненты биспинора.

[2] Здесь использован ход рассуждений, содержащийся в работе Р. Пенроуза [27].

2. Распишем четыре комплексных параметра биспинора через восемь вещественных параметров

$$\begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - iz_2 \\ z_3 - iz_4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + iy_2 \\ y_3 + iy_4 \end{pmatrix}, \tag{7.2.2}$$

тогда имеем два комплексных уравнения:

$$\begin{pmatrix} z_1 - iz_2 \\ z_3 - iz_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 + \tilde{x}^3 & \tilde{x}^1 - i\tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2 & \tilde{x}^0 - \tilde{x}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + iy_2 \\ y_3 + iy_4 \end{pmatrix}. \tag{7.2.3}$$

Приравнивая в каждом из этих уравнений слева и справа отдельно вещественные и мнимые части, получим 4 вещественных уравнения для 4 неизвестных:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^0 y_1 + \tilde{x}^1 y_3 + \tilde{x}^2 y_4 + \tilde{x}^3 y_1 = z_1; \\ &\tilde{x}^0 y_2 + \tilde{x}^1 y_4 - \tilde{x}^2 y_3 + \tilde{x}^3 y_2 = -z_2; \\ &\tilde{x}^0 y_3 + \tilde{x}^1 y_1 - \tilde{x}^2 y_2 - \tilde{x}^3 y_3 = z_3; \\ &\tilde{x}^0 y_4 + \tilde{x}^1 y_2 + \tilde{x}^2 y_1 - \tilde{x}^3 y_4 = -z_4. \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

3. Легко убедиться, что детерминант этой системы тождественно равен нулю. Нетривиальные решения существуют при выполнении условия

$$z_1 y_2 + z_2 y_1 + z_3 y_4 + z_4 y_3 = 0. \tag{7.2.5}$$

Введя элементы b и σ с параметрами, комплексно сопряженными с соответствующими параметрами β^s и s^l, можно убедиться, что это соотношение означает обращение в нуль инварианта

$$\overline{\Psi}\gamma^5\Psi = 0. \tag{7.2.6}$$

4. Пусть условие (7.2.5) выполнено. Тогда из (7.2.4) можно найти три компоненты $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$ и $\tilde{x}^3$ как функции четвертой компоненты $\tilde{x}^0$:

$$\tilde{x}^1 = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \times$$

$$\times \left[-2\tilde{x}^0 (y_1 y_2 + y_2 y_4) + (z_1 y_3 - z_2 y_4 + z_3 y_1 - z_4 y_2) \right]; \qquad (7.2.7)$$

$$\tilde{x}^2 = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \times$$

$$\times \left[-2\tilde{x}^0 (y_1 y_4 - y_2 y_3) + (z_1 y_4 + z_2 y_3 - z_3 y_2 - z_4 y_1) \right]; \qquad (7.2.8)$$

$$\tilde{x}^3 = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \times$$

$$\times \left[-\tilde{x}^0 (y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2) + (z_1 y_1 - z_2 y_2 - z_3 y_3 + z_4 y_4) \right]. \qquad (7.2.9)$$

Во всех этих соотношениях в качестве коэффициентов при $\tilde{x}^0$ стоят соответствующие компоненты изотропного вектора $k^\mu(b, \beta)$, построенного на сопряженной паре элементов b и β, согласно (4.4.6). Этот изотропный вектор следует считать характеризующим положение приемника излучения, испущенного базисом. Данная интерпретация находится в рамках реляционного подхода к физике, где нет переносчиков физических взаимодействий, а они описываются лишь характеристиками взаимодействующих частиц. Как известно, электромагнитные взаимодействия характеризуются нулевыми интервалами, или, — на языке готового пространства-времени, — осуществляются по световым (изотропным) линиям.

Вторые же части в этих формулах представляют собой компоненты моментов M^i, определяемые через смешанные комбинации двух спиноров, согласно формулам (5.4.13).

5. Переобозначим компоненту $x^0 = \tilde{x}^0$, а оставшиеся три компоненты в (7.2.7), (7.2.8), (7.2.9) представим в виде:

$$\tilde{x}^1 = x^1 - \frac{M^1}{x^0}; \quad \tilde{x}^2 = x^2 - \frac{M^2}{x^0}; \quad \tilde{x}^3 = x^3 - \frac{M^3}{x^0}. \qquad (7.2.10)$$

Поскольку вектор $k^\mu(b, \beta)$ изотропен, то введенные таким образом величины (координаты) x^μ удовлетворяют условию:

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \qquad (7.2.11)$$

т. е. совокупность величин x^μ можно трактовать как изотропную линию в 4-мерном координатном пространстве-времени.

В рамках бинарной геометрофизики подобным образом введенные координаты соответствуют переходу к изотропным векторам путем сшивки не двух, а одной пары элементов из противоположных множеств. Определенные в (7.2.10) величины $x^i = x^0 l^i$ строятся из единичных 3-мерных векторов $l^i = k^i(b, \beta)/k^0(b, \beta)$, умноженных на конформный фактор (длину), в качестве которого выступает независимая компонента x^0.

6. Взяв вместо (7.2.1) обратное ему соотношение типа $b^l = iK^{l\dot{r}}\sigma_{\dot{r}}$, получим другую картину, где изотропный вектор $k^\mu(s\sigma)$ окажется сопоставленным с другой парой элементов (s, σ), величина же M^i по-прежнему будет определяться всей четверкой элементов: b, β, s, σ.

7.3. Хроногеометрия

1. Для перехода от введенных выше изотропных векторов к пространственно-временным отношениям еще не хватает ряда существенных факторов. Прежде всего, не был определен конформный фактор x^0, задающий длину 3-мерных составляющих изотропного вектора. Как было показано в предыду-

щей главе, этот фактор возникает из БСКО ранга (2,2), а точнее, после декомпактификации параметров этой системы отношений, превращающей ее в БСВО ранга (2, 2; а).

Как уже отмечалось, наличие БСВО ранга (2, 2; а) означает, что определены вещественные отношения на 1-мерной прямой. Здесь мы имеем в виду мировую линию наблюдателя, т. е. связанных состояний элементарных частиц, способных «излучать» и принимать «излучение». Понятие события на этой линии означает, что в нем участвует не только данный наблюдатель, но и какие-то связанные системы (объекты) за пределами его мировой линии. Данный факт лежит в основе практического задания двух координат (расстояния и момента времени) событий, происходящих за пределами мировой линии, но влияющих на наблюдателя. На практике это реализуется методом радиолокации, который в теоретическом плане описывается хроногеометрией.

2. Напомним методику получения информации об окружающей обстановке посредством посылки и приема отраженных электромагнитных сигналов [1,29], которая позволяет сопоставить событие b вне мировой линии наблюдателя с парой событий на мировой линии наблюдателя: с событием (моментом) излучения сигнала и событием (моментом) его приема. Пусть событие a на мировой линии наблюдателя означает начало отсчета его собственного времени, событие i — соответствует излучению сигнала, а событие k — приему отраженного сигнала (см. рис. 7.1), тогда квадрат интервала между точкой начала отсчета времени a наблюдателя и событием b, в котором произошло отражение сигнала, представляется через соответствующие интервалы времени τ_{ai} и τ_{ak} в виде:

$$s_{ab}^2 = \tau_{ab}^2 - l_{ab}^2 = \tau_{ai}\tau_{ak}, \tag{7.3.1}$$

где *разность временных координат* двух событий a и b определена через полусумму парных отношений на мировой линии

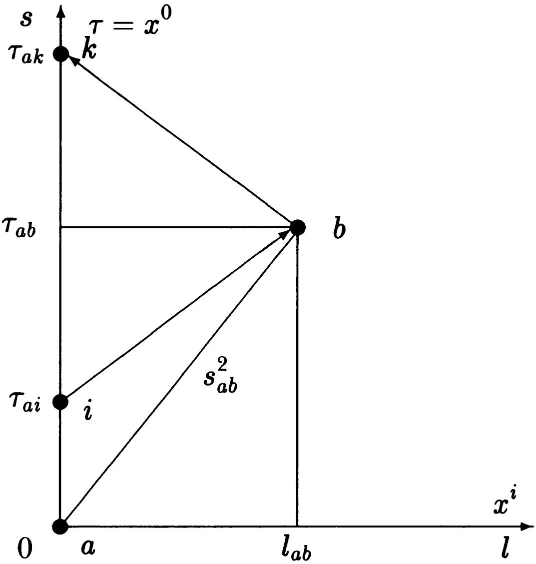


Рис. 7.1. Задание двух координат события b методом хроногеометрии

наблюдателя (интервалов времени)

$$\tau_{ab} \equiv \frac{1}{2}(\tau_{ai} + \tau_{ak}), \tag{7.3.2}$$

а *расстояние* (пространственный интервал) l_{ab} между этими событиями — через полуразность тех же отношений:

$$l_{ab} = \frac{1}{2}(\tau_{ak} - \tau_{ai}). \tag{7.3.3}$$

3. Данные рассуждения справедливы и в том случае, когда одно или оба события i и k предшествуют событию a. Следует лишь полагать, что временные интервалы τ_{ai} антисимметричны, т. е. принимают положительные значения, если событие i следует за событием a, и отрицательные значения, если i пред-

шествует a. В случае, например, когда событие i предшествует событию a, число τ_{ai} становится отрицательным, и, согласно определению (7.3.1), события a и b становятся пространственно-подобными ($s_{ab}^2 < 0$).

4. Изложенная принципиальная схема введения двух координат событий вне мировой линии наблюдателя (макроприбора) многократно обсуждалась в работах физиков, геометров и даже в трудах по философии естествознания. В частности, эта схема положена в основу специальной формулировки общей теории относительности как *хроногеометрии*, когда измерение координат и других понятий теории относительности осуществляется лишь с помощью показаний часов наблюдателя (или ряда наблюдателей). Так, известный физик-гравитационист Дж. Синг писал: «Для нас единственной *основной мерой является время.* Длина (или расстояние), поскольку возникает необходимость или желательность их введения, будет рассматриваться как строго производное понятие. (...) Фактически мы имеем дело с римановой хроногеометрией, а не *геометрией*, слово *геометрия*, внушающее опасение, что нам, чего доброго, придется возиться с измерением длин с помощью *метровой линейки*, можно было бы в этой связи полностью исключить из употребления, если бы грубое буквальное значение понятия геометрии не приобрело глубокой связи с абстрактными математическими определениями „пространства“, „метрик“ и т. д.» [29, с. 101].

Особо подчеркнем, что хроногеометрия автоматически приводит к сигнатуре $(+-)$, т. е. описывает именно 2-мерные пространственно-временные отношения.

5. Изложенную выше хроногеометрию можно переформулировать в терминах УСВО ранга (4; а), т. е. именно на 4 точках-событиях, фигурирующих в описанной процедуре. Для этого возьмем закон вырожденной УСВО ранга (4; а), аналогичный записанному в (2.2.1), и подставим в него отношения

между 4 названными выше событиями. (Три точки-события лежат на мировой линии одиночного наблюдателя: начало отсчета a, точка испускания сигнала i и точка приема отраженного сигнала k, а четвертая точка b лежит вне мировой линии наблюдателя.) Тогда, учитывая, что между событием b и событиями i и k интервалы равны нулю, закон типа (2.2.1) принимает вид

$$\Phi_{(4;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 \\ 1 & s_{ba}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s_{ia}^2 & 0 & 0 & s_{ik}^2 \\ 1 & s_{ka}^2 & 0 & s_{ki}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.3.4)$$

Будем рассматривать точки-события i и k как эталонные (базис) и выразим отношение s_{ab}^2 между двумя другими событиями a (на мировой линии наблюдателя) и событием b вне мировой линии через их отношения к эталонным элементам и отношение между самими эталонными элементами. Для этого будем рассматривать закон (7.3.4) как уравнение относительно парного отношения s_{ab}^2. Решая это уравнение и учитывая, что $s_{ik} = s_{ak} - s_{ai}$, находим

$$s_{ab}^2 = s_{ak} s_{ai}, \qquad (7.3.5)$$

что совпадает с основным соотношением хроногеометрии (7.3.1).

6. Далее можно выразить параметры события b через отношения события a к эталонным элементам i и k, согласно (7.3.2) и (7.3.3). Очевидно, что тогда параметры события a должны выражаться через равные нулю отношения события b к эталонным элементам i и k, что соответствует определению начала отсчета в точке-событии a.

7. Как отмечалось в главе 1, миноры используемых в геометрии законов, как правило, имеют некий геометрический смысл. В частности, здесь это относится к минору, описывающему, согласно формуле Герона, площадь треугольника (ikb), состоящего из двух световых сторон $s_{ib}^2 = 0$ и $s_{kb}^2 = 0$ и третьей стороны в виде промежутка времени $\tau_{ik} = \tau_{ak} - \tau_{ai} = s_{ik}$ вдоль линии наблюдателя

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s_{ik}^2 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & 0 \end{vmatrix} = s_{ik}^4. \qquad (7.3.6)$$

Треугольники такого вида с двумя изотропными (световыми) сторонами будут широко использоваться при описания физических взаимодействий в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия. Там он будет соответствовать дираковской дельта-функции от квадрата интервала между двумя взаимодействующими частицами. Напомним, эта дельта-функция (с точностью до множителя, обратного расстоянию) записывается в виде полусуммы дельта-функций от интервалов, соответствующих световым сторонам. Как известно, именно при таких аргументах значения дираковской дельта-функции отличны от нуля. Эти два значения описывают опережающие и запаздывающие взаимодействия.

7.4. Система отношений римановой геометрии (на сфере)

1. Метод хроногеометрии, как и метод введения 3-мерных составляющих изотропного вектора, изложенный в разделе 7.2, тоже имеет недостаток. С помощью изложенной хроногео-

метрической схемы можно определить *лишь две координаты* $\tau_{ab} = x^0_{ab}$ и l_{ab} произвольной точки-события b. Не внося в эту схему ничего дополнительного, нельзя получить две оставшиеся (угловые) координаты события b. Для наблюдателя оказываются равнозначными все точки, изображенные на рис. 7.2 в виде окружности. В 4-мерном пространстве-времени они соответствуют 2-мерной сфере радиуса $l_{(ab)}$.

2. При изложении теории классического 4-мерного пространства-времени на основе модели хроногеометрии приходится вводить дополнительные понятия или усложнять описанную методику[3]. Здесь же в качестве дополнительной методики используем возможность измерения направлений на точки-события, где происходят отражения (переизлучения) сигналов. Другими словами, объединяются две составляющие БСКО ранга (3,3): ответственные за задание двух углов (см. раздел 7.2) и следствия из БСВО ранга (2, 2; a) в виде хроногеометрии.

3. Развернем геометрию на 2-мерной сфере, опираясь на уже введенные в рамках хроногеометрии длины 3-мерных составляющих изотропных векторов. Для этого выделим четыре точки-события b, c, d, e на световом конусе будущего с вершиной в точке-событии i на мировой линии наблюдателя. Для всех этих событий

$$s^2_{ib} = \tau^2_{(ib)} - l^2_{(ib)} = 0; \quad s^2_{ic} = \tau^2_{(ic)} - l^2_{(ic)} = 0; \quad \dots, \tag{7.4.1}$$

[3] Один из способов преодоления этой трудности состоит в использовании нескольких наблюдателей. Оказывается, угловые координаты события M можно определить, если его измерять как минимум тремя наблюдателями. При этом полагается, что наблюдатели обмениваются между собой сигналами, определяя таким образом взаимные расстояния. Такой способ интересен тем, что не опирается на качественно иные методы получения информации и пригоден не только в плоском, но и в искривленном пространстве-времени общей теории относительности.

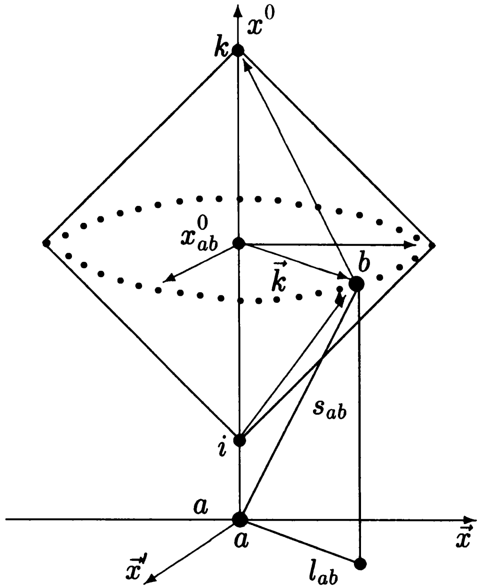


Рис. 7.2. Пары координат, установленные методом хроногеометрии, одинаковы для всех точек, лежащих на окружности

где с пространственной частью интервала может быть соотнесен вектор с вершиной в точке i и с компонентами вида:

$$\vec{l}_{(ib)} = \left\{x^1_{(ib)}, x^2_{(ib)}, x^3_{(ib)}\right\}, \tag{7.4.2}$$

где 3 пространственные компоненты соответствуют записи парного отношения, согласно (1.1.6).

Для этих векторов имеют место скалярные произведения вида:

$$\left(\vec{l}_{(ib)}, \vec{l}_{(ic)}\right) = x^1_{(ib)}x^1_{(ic)} + x^2_{(ib)}x^2_{(ic)} + x^3_{(ib)}x^3_{(ic)} \equiv x^s_{(ib)}x_{s(ic)}. \tag{7.4.3}$$

Как известно, любые четыре 3-мерных вектора являются линейно зависимыми, что соответствует равенству нулю определителя Грама, построенного на этих векторах:

$$\begin{vmatrix} l^2_{(ib)} & x_{s(ib)}x^s_{(ic)} & x_{s(ib)}x^s_{(id)} & x_{s(ib)}x^s_{(ie)} \\ x_{s(ic)}x^s_{(ib)} & l^2_{(ic)} & x_{s(ic)}x^s_{(id)} & x_{s(ic)}x^s_{(ie)} \\ x_{s(id)}x^s_{(ib)} & x_{s(id)}x^s_{(ic)} & l^2_{(id)} & x_{s(id)}x^s_{(ie)} \\ x_{s(ie)}x^s_{(ib)} & x_{s(ie)}x^s_{(ic)} & x_{s(ie)}x^s_{(id)} & l^2_{(ie)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.4.4)$$

Данный определитель по-прежнему будет обращаться в нуль, если перейти к нормированным на единицу 3-мерным векторам вида:

$$k^s_{(b)} = \frac{x^s_{(ib)}}{l_{(ib)}}; \to \ k^s_{(b)}k_{s(b)} = 1. \qquad (7.4.5)$$

В этом случае определитель Грама (7.4.4) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 & k_{s(b)}k^s_{(c)} & k_{s(b)}k^s_{(d)} & k_{s(b)}k^s_{(e)} \\ k_{s(c)}k^s_{(b)} & 1 & k_{s(c)}k^s_{(d)} & k_{s(c)}k^s_{(e)} \\ k_{s(d)}k^s_{(b)} & k_{s(d)}k^s_{(c)} & 1 & k_{s(d)}k^s_{(e)} \\ k_{s(e)}k^s_{(b)} & k_{s(e)}k^s_{(c)} & k_{s(e)}k^s_{(d)} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.4.6)$$

Данное соотношение является условием того, что концы 3-мерных векторов лежат на 2-мерной сфере единичного радиуса, т. е. их можно охарактеризовать двумя сферическими координатами θ и φ. Эти две координаты в совокупности с определенными хронометрическим способом двумя величинами τ_{ib} и $l_{(ib)}$ полностью характеризуют положение точки-события b, где произошло переизлучение сигнала.

7.5. Композиция двух систем отношений

Продемонстрируем, как можно перейти от хроногеометрии, опирающейся на закон (7.3.4), и УСВО ранга (4) с законом (7.4.6) к закону УСВО ранга (6; a), соответствующему 4-мерной геометрии пространства-времени Минковского. Сделаем это в несколько этапов.

1. Будем исходить из закона (7.4.6) УСВО ранга (4) для 3-мерных нормированных на единицу составляющих четырех изотропных векторов, нацеленных на события b, c, d и e. Используя метод хроногеометрии, введем длины векторов $\vec{l}_{ib}$, $\vec{l}_{ic}$, $\vec{l}_{id}$, $\vec{l}_{ie}$, проведенных из точки i на мировой линии наблюдателя (см. рис. 7.2). Умножая строки и столбцы на соответствующие длины векторов, возвращаемся к равному нулю определителю Грама (7.4.4).

2. Вспомним, что на мировой линии наблюдателя начало отсчета времени производится от точки a. Введем в рассмотрение эту точку, определив теперь пять 4-мерных векторов с началом в точке a и с концами в точках i, b, c, d и e. Эти векторы имеют компоненты:

$$x^{\mu}_{ai} = \{\tau_{ai}, 0, 0, 0\}; \quad x^{\mu}_{ab} = \left\{(\tau_{ai} + l_{ib}), x^1_{ib}, x^2_{ib}, x^3_{ib}\right\}; \quad \ldots \quad (7.5.1)$$

(Здесь использована система единиц, в которой $c = 1$.) Полагая, что 5 этих векторов линейно не зависимы, записываем для них равный нулю определитель Грама:

$$\begin{vmatrix} \tau^2_{ai} & \tau_{ai}(\tau_{ai}+l_{ib}) & \tau_{ai}(\tau_{ai}+l_{ic}) & \ldots & \ldots \\ (\tau_{ai}+l_{ib})\tau_{ai} & (\tau_{ai}+l_{ib})^2 - l^2_{ib} & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\tau_{ai}+l_{ic})\tau_{ai} & (\tau_{ai}+l_{ic})(\tau_{ai}+l_{ib}) - x_{(ic)s}x^s_{(ib)} & (\tau_{ai}+l_{ic})^2 - l^2_{ic} & \ldots & \ldots \\ (\tau_{ai}+l_{id})\tau_{ai} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\tau_{ai}+l_{ie})\tau_{ai} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0. \quad (7.5.2)$$

3. Используя теорему косинусов, перепишем входящие в этот определитель Грама скалярные произведения через квадраты интервалов между соответствующими событиями:

$$(\tau_{ai}+l_{ib})(\tau_{ai}+l_{ic}) - x_{s(ib)}x^s_{(ic)} = \frac{1}{2}\left(s^2_{ab} + s^2_{ac} - s^2_{bc}\right);$$

$$\tau^2_{ai} = s^2_{ai}; \quad \tau_{ai}(\tau_{ai}+l_{ib}) = \frac{1}{2}\left(s^2_{ai} + s^2_{ab}\right); \quad (\tau_{ai}+l_{ib})^2 - l^2_{ib} = s^2_{ab}. \quad (7.5.3)$$

В итоге получаем выражение

$$\begin{vmatrix} s_{ai}^2 & \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ab}^2) & \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ac}^2) & \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ad}^2) & \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ae}^2) \\ \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ab}^2) & s_{ab}^2 & \frac{1}{2}(s_{ab}^2+s_{ac}^2-s_{bc}^2) & \frac{1}{2}(s_{ab}^2+s_{ad}^2-s_{bd}^2) & \frac{1}{2}(s_{ab}^2+s_{ae}^2-s_{be}^2) \\ \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ac}^2) & \frac{1}{2}(s_{ab}^2+s_{ac}^2-s_{bc}^2) & s_{ac}^2 & \frac{1}{2}(s_{ac}^2+s_{ad}^2-s_{cd}^2) & \frac{1}{2}(s_{ac}^2+s_{ae}^2-s_{ce}^2) \\ \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ad}^2) & \frac{1}{2}(s_{ab}^2+s_{ad}^2-s_{bd}^2) & \frac{1}{2}(s_{ac}^2+s_{ad}^2-s_{cd}^2) & s_{ad}^2 & \frac{1}{2}(s_{ad}^2+s_{ae}^2-s_{ed}^2) \\ \frac{1}{2}(s_{ai}^2+s_{ae}^2) & \frac{1}{2}(s_{ab}^2+s_{ae}^2-s_{be}^2) & \frac{1}{2}(s_{ac}^2+s_{ae}^2-s_{ce}^2) & \frac{1}{2}(s_{ad}^2+s_{ae}^2-s_{ed}^2) & s_{ae}^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.5.4}$$

4. Произведем окаймление данного определителя. Для этого добавим в него новую строку, в которой первый элемент равен единице, а остальные равны нулю. Тогда все элементы нового первого столбца, кроме первого, могут быть произвольными. В качестве таковых выберем половины соответствующих диагональных элементов предыдущего определителя. Вычитая из второго, третьего и т. д. столбцов первый столбец и умножая строки, начиная со второй, на 2, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ s_{ai}^2 & s_{ai}^2 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 & s_{ae}^2 \\ s_{ab}^2 & s_{ai}^2 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 - s_{cb}^2 & s_{ad}^2 - s_{bd}^2 & s_{ae}^2 - s_{be}^2 \\ s_{ac}^2 & s_{ai}^2 & s_{ab}^2 - s_{bc}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 - s_{dc}^2 & s_{ae}^2 - s_{ec}^2 \\ s_{ad}^2 & s_{ai}^2 & s_{ab}^2 - s_{bd}^2 & s_{ac}^2 - s_{cd}^2 & s_{ad}^2 & s_{ae}^2 - s_{ed}^2 \\ s_{ae}^2 & s_{ai}^2 & s_{ab}^2 - s_{be}^2 & s_{ac}^2 - s_{ce}^2 & s_{ad}^2 - s_{de}^2 & s_{ae}^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.5.5}$$

5. Произведем второе окаймление, положив в новом первом столбце начальный элемент равным единице, а остальные – нулевыми, тогда все элементы первой новой строки,

кроме первого, можно положить произвольными. Сделаем второй элемент строки нулевым, а последующие соответственно равными значениям: $s^2_{ai}, s^2_{ab}, s^2_{ac}, s^2_{ad}, s^2_{ae}$. Вычтем первую строку последовательно из 3-й, 4-й и т. д. Затем переставим 1-ю и 2-ю строки, умножим на минус единицу первую, третью и т. д строки и на минус единицу второй столбец. Поменяв местами несколько строк и столбцов, получаем выражение

$$\Phi_{(6)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s^2_{ai} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s^2_{ia} & 0 & s^2_{ab} & s^2_{ac} & s^2_{ad} & s^2_{ae} \\ 1 & 0 & s^2_{ba} & 0 & s^2_{bc} & s^2_{bd} & s^2_{be} \\ 1 & 0 & s^2_{ca} & s^2_{cb} & 0 & s^2_{cd} & s^2_{ce} \\ 1 & 0 & s^2_{da} & s^2_{db} & s^2_{dc} & 0 & s^2_{de} \\ 1 & 0 & s^2_{ea} & s^2_{eb} & s^2_{ec} & s^2_{ed} & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (7.5.6)$$

которое соответствует закону УСВО ранга (6), записанному в (1.2.2) с той разницей, что в этом выражении точка-событие i соотносится с четырьмя другими событиями через нулевой интервал. Перейдя от точки-события i к произвольной другой точке на мировой линии наблюдателя, получим отличные от нуля интервалы на второй строке и втором столбце, что будет в полном соответствии с законом (1.2.2) УСВО ранга (6; a).

В данном рассуждении в качестве эталонных элементов выступают точки-события a и i на мировой линии наблюдателя плюс два из четырех событий b, c, d или e. Эти две точки являются опорными и от них отсчитываются углы φ и θ в сферической координатной системе. Эти углы и две координаты (радиальная и временная) позволяют определить отношения между двумя оставшимися точками-событиями.

7.6. Некоторые выводы и замечания

1. Назначение этой главы состояло в том, чтобы показать, что для перехода от первичной БСКО ранга (3,3) к классическим пространственно-временным отношениям необходимо перейти от пар элементов, составляющих отдельные элементарные частицы к парам элементов, соответствующим связанным элементарным частицам, т. е. к атому. В данном случае подразумевался простейший случай водородоподобного атома. Здесь же ставилась задача вывода закона УСВО ранга (6; а), соответствующего классическим пространственно-временным отношениям, из двух УСВО рангов (4) и (4; а), которые соответствуют БСКО рангов (3,3) и (2, 2; а).

2. Пространственно-временные отношения обусловлены существованием связанных состояний (атомов и молекул), образованных двумя видами элементарных частиц. Обращая внимание на соответствие теорий БСКО ранга (3,3) при описании отдельных элементарных частиц и связанных систем типа атомов, отметим, что в обоих случаях объекты (как частицы, так и атомы) строились из элементов двух противоположных множеств. При описании элементарных частиц это были левые и правые элементы, тогда как при описании атома это были две элементарные частицы противоположных электрических зарядов. В этом можно увидеть проявление метафизического принципа фрактальности.

3. Изложенный в этой главе материал (и вообще программа бинарной геометрофизики) в ряде аспектов пересекается с развиваемой Р. Пенроузом и его коллегами так называемой теорией твисторов [27, 28, 32]. Это относится как к идеологической части теорий, так и к ряду технических средств, используемых для их построения. Близость этих двух программ проявляется, во-первых, в одинаковом понимании классического пространства-времени как некой вторичной конструкции, которую нужно получить из более первичных понятий

физики микромира. Во-вторых, в обеих программах в качестве более первичных понятий выступают 2-компонентные (комплексные) спиноры, более того, именно пары 2-компонентных спиноров. В программе Пенроуза специфическая комбинация из них называется *твистором.*

4. Вместе с тем имеются и существенные различия как в исходных положениях, так и в содержании двух программ. Отсылая читателя к оригинальным работам Р. Пенроуза и его единомышленников [28, 32], ограничимся лишь кратким сопоставлением некоторых понятий в двух теориях, показывающих, что язык твисторов, в отличие от биспиноров (см. главу 5), нацелен на описание, главным образом, пространственно-временных (координатных) отношений.

Твистор Z^μ в теории Пенроуза образован парой 2-компонентных величин, которые, не вдаваясь пока в используемую автором интерпретацию, обозначим контравариантным спинором k^s и ковариантным спинором $\alpha_{\dot{s}}$ из сопряженного пространства, т. е.

$$Z^\mu = \{k^1, k^2; \alpha_{\dot{1}}, \alpha_{\dot{2}}\}. \tag{7.6.1}$$

Пространственно-временные координаты в этой теории вводятся на основе так называемого *основного соотношения теории твисторов*

$$k^s = ix^{s\dot{r}}\alpha_{\dot{r}}, \tag{7.6.2}$$

которое лишь коэффициентом (мнимой единицей) отличается от выражения (7.2.1).

5. На языке теории твисторов условие разрешимости системы уравнений вида (7.2.6) означает равенство нулю твисторного инварианта

$$\overline{Z}_\mu Z^\mu = i^s\beta_{\dot{s}} + k^s\alpha_{\dot{s}} \equiv 2s = 0, \tag{7.6.3}$$

которое трактуется как условие обращения в нуль спиральности $s = 0$.

В рамках теории твисторов говорят, что решение вида (7.2.10) определяет «флаг», «древко» которого направлено вдоль изотропного луча x^{μ}, а «полотнище» ориентировано вдоль M^{i}, характеризующего ориентацию спина.

6. Изложенный в этой главе материал представляет собой лишь несколько предварительных, но крайне необходимых шагов на пути реализации провозглашенной программы вывода классических пространственно-временных отношений из неких более элементарных факторов физического характера. Для более подробного рассмотрения как пройденного пути, так и дальнейших шагов по выводу классических пространственно-временных отношений предполагается обсудить в следующих книгах данной серии.

Заключение

Приступая к работе над этой книгой, мы ставили перед собой задачу показать, что в основание геометрии как микромира, так и макромира нужно положить самостоятельную систему реляционных понятий и закономерностей, не требующих предварительного задания классических пространственно-временных отношений и сопутствующих им макропонятий. В реляционном подходе значимы только прямые отношения между частицами и элементами-событиями, а рассмотрение пустых точек непрерывного пространства-времени, в которых отсутствуют частицы, полагается бессмысленным.

В качестве основных понятий развиваемой здесь бинарной геометрофизики выступают комплексные отношения (числа) между элементами двух множеств, соответствующих состояниям элементарных частиц. Параметры элементов характеризуются их отношениями к элементарным базисам, каковыми могут являться аналогичные элементарные частицы.

На основе бинарных систем комплексных отношений минимальных рангов (3,3) и (2,2) можно приступить к решению проблемы вывода классических пространственно-временных отношений из более элементарных физических закономерностей, в частности, на этой основе удается вскрыть истоки ряда фундаментальных свойств классического пространства-времени.

1. Есть все основания утверждать, что БСКО минимальных рангов можно рассматривать как прообраз общепринятых (унарных) геометрий, т. е. как своеобразные бинарные геометрии.

2. Размерность общепринятых (унарных) геометрий определяется рангом БСКО, т. е. числом элементов БСКО, для которых пишется закон бинарной геометрии. В частности, размерность 4 и сигнатура (+−−−) классического пространства-времени обусловлены минимальным рангом (3,3) невырожденной БСКО.

В связи с этим напомним, что в известной монографии Ч. Мизнера, К. Торна и Дж. Уилера «Гравитация» ставился «вопрос о том, можно ли построить геометрию с помощью квантового принципа из основных элементов, которые сами по себе не обладают какой-либо определенной размерностью. В центре внимания дискуссии, которая проходила в 1964 г., была „размерность без размерности“» [1)].

В бинарной геометрофизике **размерность вводится не как топологическое свойство непрерывного многообразия, а алгебраически — через ранг закона БСКО**, т. е. размерность определяется числами элементов, связанных в законе.

3. Поскольку элементы БСКО ранга (3,3) описываются 2-компонентными спинорами, то тем самым обоснован спинорный характер элементарных частиц. В связи с этим уместно продолжить приведенную выше цитату: «Однако основными причинами, заставляющими размышлять о предгеометрии, были и остаются две характерные особенности природы: спин 1/2 и заряд, говорящие сами за себя во весь голос в любой области физики элементарных частиц.» В охарактеризованной здесь реляционной теории спиноры имеют более первичный характер, нежели векторы и тензоры в классической теории.

4. На основе теории БСКО открыт новый путь введения и обобщения 2-компонентных спиноров. В рамках БСКО более высоких рангов по аналогии с 2-компонентными спино-

[1)] *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977. С. 474.

рами вводятся 3-, 4- и т. д. компонентные спиноры, которые естественно назвать финслеровыми.

5. В рамках бинарной геометрофизики выявлено, что квадратичный характер мероопределения (метрики) общепринятой геометрии обусловлен именно БСКО ранга (3,3). В Приложении показано, что если бы геометрия классического пространства-времени возникала из теории БСКО более высоких рангов, нежели (3,3), то она имела бы большую размерность и кубичное, четвертой степени и т. д. мероопределение, что соответствует финслеровым геометриям.

6. Исходя из проведенного анализа следует, что истоком понятия метрики (расстояний, промежутков времени и интервалов) являются параметры элементов БСКО минимального ранга (2,2), которая представляет собой подсистему БСКО ранга (3,3).

7. Есть основания утверждать, что два вида отношений: пространственно-временных (координатного пространства) и в пространстве скоростей (импульсного пространства) обусловлены наличием связанных систем из двух видов электрически заряженных частиц. В бинарной геометрофизике простейший атом типа водорода характеризуется четырьмя спинорами (элементами), которые, в силу связанности частиц расщепляются на две пары: пару спиноров, характеризующих скорость объединенной системы, и два спинора, определяющие пространственно-временные отношения.

При наличии связанных систем фактически выстраиваются новые бинарные системы комплексных отношений, в которых базис составлен из элементарных частиц, а не из элементов, составляющих частицы.

Для окончательного перехода к унарной геометрии, соответствующей пространству-времени Минковского, и к общепринятой теории физических взаимодействий, необходимо решить ряд принципиально важных задач, которые рассматриваются в следующих двух книгах данной серии. Забегая вперед, поясним суть и пути их решения.

Прежде всего, напомним, что в 4-й, 5-й и 6-й главах рассматривалась теория систем отношений, предназначенная для описания отношений между элементарными частицами вне зависимости от каких-либо классических (макроскопических) понятий типа макроприбора или общепринятого пространства-времени, причем в качестве базиса выступали такие же микрочастицы. Для перехода от этой теории к общепринятой следует осуществить ряд процедур.

В главе 5 были введены обозначения для классической теории символом $R_m(m)$, квантовой теории – $R_m(\mu)$, а предгеометрия, развиваемая на базе БСКО ранга (3,3), обозначена символом $R_\mu(\mu)$. При этом в круглых скобках обозначен класс рассматриваемых объектов: макрообъектам соответствует символ m, а микрообъектам сопоставлена буква μ. Внизу указан вид базиса (тела отсчета), также являющегося либо макроприбором, либо микрообъектом (элементарной частицей).

Но этого мало, – для получения из предгеометрии известных теорий, соответствующих трем миропониманиям, необходимо учитывать материю всего мира, т. е. учесть принцип Маха. Окружающий мир неявно входит в любую теорию, однако широко распространена иллюзия, что можно от него отвлечься и рассматривать явления локально, учитывая лишь обстановку в непосредственной близости. Избрав для обозначения окружающего мира символ M, введем его справа сверху в символ соответствующей теории R. Тогда квантовая теория может быть обозначена символом $R_m^M(\mu)$, а классическая механика – символом $R_m^M(m)$.

Суммируя сказанное, приходим к выводу, что *в любой физической теории единый мир расщепляется на три взимосвязанные части:*

1) *рассматриваемые объекты;*
2) *субъект, относительно которого рассматриваются объекты;*
3) *весь остальной окружающий мир.*

При этом как объекты, так и субъекты могут быть отдельными элементарными частицами или достаточно сложными макрообъектами.

Истоки классических пространственно-временных и общепринятых физических представлений следует искать в принципах описания отношений простейших элементарных частиц, т. е. исходя из теории вида $R_\mu(\mu)$. А охарактеризованную выше бинарную геометрофизику в рамках БСКО ранга (3,3) можно рассматривать как упрощенную основу такой теории.

С помощью рис. I предлагается взглянуть на поставленную проблему с наиболее общих позиций, как бы свысока, используя образное представление основ мироздания через куб физи-

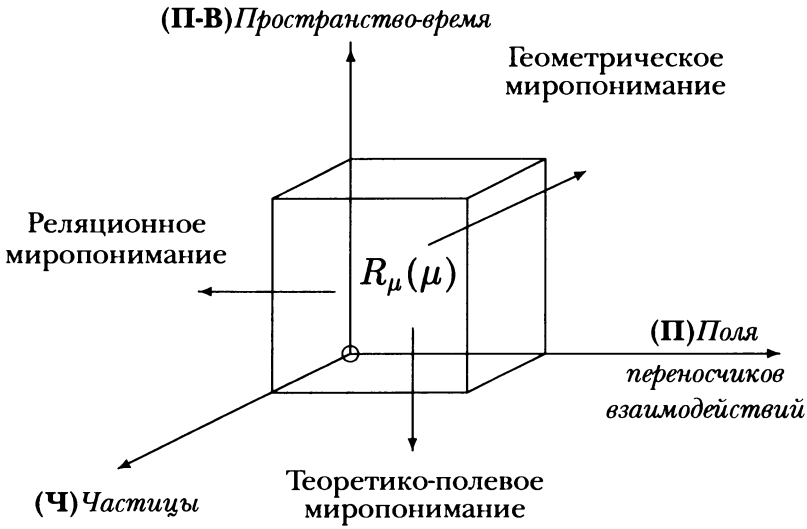


Рис. I. Переход от элементарной бинарной геометрофизики к известным теориям трех миропониманий ческой реальности. Внутрь куба помещены исходные представления теории $R_\mu(\mu)$ (предгеометрии или шире – бинарной геометрофизики) и от нее стрелками указаны переходы к известным физическим теориям трех дуалистических парадигм.

Опираясь на сформулированные в этой книге ключевые понятия и принципы бинарной геометрофизики, а также на выявленные истоки категорий классической физики и геометрии, необходимо показать, как конкретно осуществляется переход от них к привычным представлениям физики, в частности, к классическому пространству-времени, полям переносчиков взаимодействий и другим понятиям и закономерностям известных физических теорий. Иначе говоря, необходимо описать путь от первичной теории к общепринятым теориям (в дуалистических парадигмах).

Отметим, что решение данной проблемы тесно связано с проблемой перехода от исконно квантовых свойств микромира к закономерностям классической физики. Так в монографии М. Б. Менского, посвященной анализу принципов квантовой теории, говорится: «Теперь мы оказываемся перед лицом самого трудного и интригующего вопроса: как появляются классические черты у исходно квантового мира. В известном смысле, в наше время это очень простой вопрос. С другой точки зрения – он труден и все еще не решен, и даже может оказаться вообще неразрешимым» [2]. В примечании автор пишет: «Мы не будем обсуждать альтернативный взгляд, что наш мир не является исходно квантовым, потому что его квантовый характер на фундаментальном уровне подтверждается многочисленными физическими экспериментами (это, конечно, не является окончательным доказательством)». М. Б. Менский видит путь решения этого вопроса в рамках фейнма-

[2] *Менский М. Б.* Квантовые измерения и декогенерация. М.: Физматлит, 2001. С. 197.

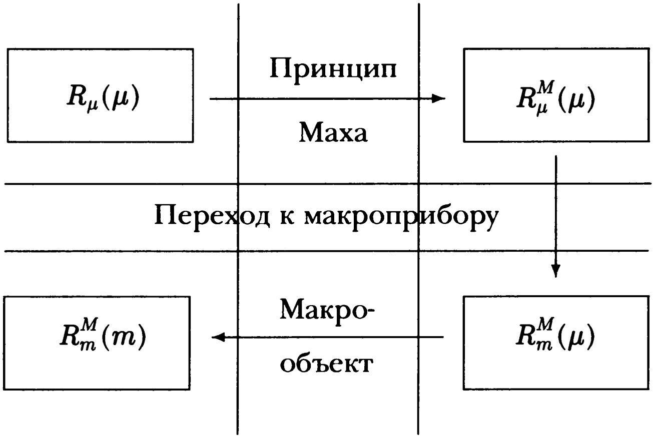


Рис. II. Блок-схема бинарной геометрофизики

новского подхода к описанию открытых систем (на основе суммирования по путям-историям).

Предстоит детально разработать переход от теории $R_\mu(\mu)$ к известным видам физических теорий: теоретико-полевой, геометрической и реляционной (на базе унарных представлений) парадигм. Чтобы это осуществить, предлагается последовательно учитывать все три фактора, производя их обобщение от простейшего вида μ до классических выражений в виде m и M. Этот путь представлен на блок-схеме рис. II, где стрелками обозначены переходы от самого элементарного уровня описания физики микромира к квантовой теории и классической механике.

На первом этапе предлагается учесть всю материю окружающего мира в духе принципа Маха, в частности, с помощью этого принципа описать появление связанных систем из элементарных частиц. Затем предстоит описать переход от элементарного базиса, составленного из простейших частиц, к макроприбору, составленному из огромного количества элементарных базисов. Третий этап означает переход от рассмотрения отдельных элементарных частиц к классическим макрообъектам, также состоящим из огромного числа элементарных частиц, особым образом связанных воедино.

Лишь пройдя все этапы по данной цепочке, можно будет говорить о выводе понятий классического пространства-времени и о построении цельной реляционной картины физического мироздания.

Но самое главное состоит в осуществлении перехода от компактифицированных фазовых параметров БСКО ранга (2,2) к классическим пространственно-временным координатам. Необходимо развить процедуру декомпактификации. По сути дела это означает развитие методики перехода от мультипликативной БСКО ранга (2,2) к ее аддитивной модификации вида БСКО ранга (2, 2; а). Намеченный путь решения этой задачи в рамках построения так называемой макроскопической теории классического пространства-времени будет рассмотрен во второй книге данной серии.

Изложенный в этой книге материал свидетельствует о том, что вслед за формулировкой реляционной теории пространственно-временных отношений следует перейти к реляционной теории взаимодействий, которая может быть построена лишь в рамках концепции дальнодействия, ибо концепция близкодействия, широко используемая в современной физике для описания взаимодействий, теряет силу: понятие поля становится бессмысленным, так как нет непрерывного пространственно-временного фона, на котором поля могут быть определены.

Путь построения теории физических взаимодействий в рамках концепции дальнодействия обсуждается в третьей книге, где намечено показать, что для решения данной задачи необходимо перейти к БСКО более высокого ранга, т. е. использовать бинарное многомерие, являющееся естественным обобщением на бинарность известных многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы.

Для создания физики дальнодействия потребуется решить следующие проблемы:

1) Построение теорий известных видов фундаментальных физических взаимодействий: электромагнитных, слабых (электрослабых), сильных и гравитационных.
2) Определение способа объединения известных видов фундаментальных взаимодействий в рамках единой теории фундаментальных физических взаимодействий.
3) Указание способа введения и нахождения значений масс элементарных частиц. В изложенной выше теории на базе БСКО ранга (3,3) массы выступали в роли произвольного коэффициента, на который умножался прообраз уравнений Дирака в импульсном пространства. Этого явно недостаточно для решения вопроса о причинах существования различных масс элементарных частиц.

Завершая книгу, хотелось бы еще раз подчеркнуть, что имеется достаточно оснований прогнозировать, что в физике XXI столетия произойдет замена концепции близкодействия на концепцию дальнодействия, вобравшую в себя идеи и опыт как традиционной теории поля, так и многомерных геометрических моделей. Автор надеется, что в данной книге удалось продвинуться в этом многообещающем направлении.

Приложение

Гипотетическая геометрия на базе БСКО ранга (4,4)

- Трехкомпонентные финслеровы спиноры
- 9-мерные векторы
- Переходы от БСКО ранга (4,4) к унарным геометриям
- Выводы и замечания

В данной книге рассматривался вопрос о получении классических пространственно-временных отношений, исходя из БСКО ранга (3,3) (из предгеометрии). Было показано, что от этой бинарной системы отношений этого ранга можно перейти к 4-мерной унарной геометрии с сигнатурой $(+---)$, откуда делался вывод, что эти свойства классического пространства-времени обусловлены БСКО именно этого ранга (3,3). Усилим это утверждение, перейдя к бинарному многомерию и рассмотрев гипотетический вопрос, какие из него могли бы возникнуть аналоги классического пространства-времени [6]. Ограничимся здесь простейшим бинарным многомерием, описываемым БСКО ранга (4,4).

Сразу же заметим, что БСКО этого ранга играет большую роль в бинарной геометрофизике, причем она выступает в трех ролях. Прежде всего, на основе БСКО ранга (4,4) можно рассмотреть вопрос о гипотетических пространственно-временных отношениях, следующих из нее, и на этой основе глубже понять происхождение ряда привычных свойств классического пространства-времени, таких как размерность, сигнатура, квадратичный характер мероопределения и т. д.

Во-вторых, БСКО ранга (4,4) можно рассматривать в качестве прямого аналога теории Калуцы в унарных многомерных геометрических моделях физических взаимодействий. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в третьей книге этой серии, где на основе БСКО ранга (4,4) описываются электромагнитные взаимодействия.

В-третьих, на основе БСКО ранга (4,4) в бинарной геометрофизике описывается так называемое внутренне (зарядовое) пространство сильно взаимодействующих частиц. Этот вопрос также будет рассмотрен в третьей книге данной серии.

В данном Приложения рассматривается лишь первая роль БСКО ранга (4,4). При этом изложение построено по тем же правилам, что и в главе 4, где была рассмотрена предгеометрия на основе БСКО ранга (3,3). Представленный здесь материал можно трактовать как более общую предгеометрию на базе БСКО ранга (4,4). Элементы этой системы отношений описываются обобщенными 3-компонентными спинорами, названными финслеровыми. Из них можно строить обобщенные векторы и по прежним правилам переходить к неким унарным (финслеровым) геометриям.

П.1. Трехкомпонентные финслеровы спиноры

Принято считать, что спиноры (и обобщенные спиноры) могут иметь лишь 2^n компонент, где n – целое число. Это следует из определения спиноров на основе алгебр Клиффорда $C(p, q)$

над полем вещественных чисел. В бинарной геометрофизике на основе БСКО более высоких рангов, нежели (3,3), предлагается другой канал обобщения 2-компонентных спиноров, допускающий 3 и большее число компонент [5–9, 12, 30, 31]. Кратко изложим основные положения этой теории так же, как это делалось в главах 3 и 4, сосредочив внимание на ряде новых моментов, обусловленных повышением ранга.

1. Согласно общей формуле (3.3.1) **закон БСКО ранга (4,4)** записывается в виде равенства нулю определителя, составленного из 16 парных отношений между двумя четверками элементов i, k, j, l и $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ из двух разных множеств

$$\Phi_{(4,4)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{П.1.1}$$

где парные отношения $u_{i\alpha}$ задаются формулой (3.3.2)

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3. \tag{П.1.2}$$

Здесь i^1, i^2, i^3 — три комплексных параметра элемента $i \in \mathcal{M}$, а $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ — комплексные параметры элемента $\alpha \in \mathcal{N}$. Это парное отношение можно рассматривать как скалярное произведение двух 3-мерных векторов из двух разных пространств.

2. **Фундаментальное** 3×3**-отношение**, согласно общим правилам, определяется как минор максимального порядка из определителя в законе (П.1.1):

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}, \tag{П.1.3}$$

т. е. аналогично (4.2.9) записывается через произведение двух определителей отдельно из параметров элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Для него принято обозначение через элементы в квадратных скобках, как и для случая фундаментального 2×2-отношения в теории БСКО ранга (3,3). Оно играет ключевую роль в общей теории БСКО ранга (4,4) и в определении 3-компонентных спиноров.

3. **Условия «сшивки»** параметров элементов при переходах от этой системы отношений к соответствующим ей унарным системам отношений опять определяются через операцию комплексного сопряжения (4.1.5).

4. **Базис БСКО ранга (4,4)** (система эталонных элементов) определяется двумя тройками элементов из двух разных множеств данной системы отношений. Как и ранее, параметры элементов можно трактовать через отношения произвольных элементов к эталонным элементам противоположного множетва.

5. **Переходы между выделенными базисами** определяют допустимые линейные преобразования параметров элементов в двух множествах:

$$\dot{i}'^{s} = C^{s}_{r}\dot{i}^{r}; \quad \alpha'^{s} = \overset{*}{C}{}^{s}_{r}\alpha^{r}. \tag{П.1.4}$$

Преобразования параметров в каждом из множеств в самом общем случае характеризуются 9 комплексными коэффициентами C^{s}_{r} (или 18 вещественными числами). Подчеркнем тот факт, что преобразования элементов в двух множествах определяются комплексно сопряженными коэффициентами.

6. Каждый элемент БСКО ранга (4,4), согласно (П.1.2), описывается вектором в 3-мерном комплексном пространстве. В каждом из двух множеств (пространств) элементов определены линейные преобразования (П.1.4). Далее, поскольку фундаментальное 3×3-отношение, согласно (П.1.3), представляется

в виде произведения двух определителей из параметров одного множества, то каждый из определителей можно рассматривать как антисимметричную (кубичную) форму для троек элементов в соответствующем множестве. Так, в множестве $\mathcal{M}$ для трех элементов i, k, j определено тройное отношение

$$b_{(ikj)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \equiv \varepsilon_{srl} i^s k^r j^l =$$

$$= i^1 k^2 j^3 + i^3 k^1 j^2 + i^2 k^3 j^1 - i^3 k^2 j^1 - i^2 k^1 j^3 - i^1 k^3 j^2, \qquad \text{(П.1.5)}$$

играющее такую же роль, что и (4.2.10) в теории 2-компонентных спиноров в рамках БСКО ранга (3,3).

7. Остается лишь ограничиться такими преобразованиями из (П.1.4), которые оставляют инвариантными эти кубичные формы. Легко убедиться, что при преобразованиях (П.1.4)

$$b'_{(ikj)} = \begin{vmatrix} C^1_1 & C^1_2 & C^1_3 \\ C^2_1 & C^2_2 & C^2_3 \\ C^3_1 & C^3_2 & C^3_3 \end{vmatrix} b_{(ikj)}, \qquad \text{(П.1.6)}$$

т. е. для инвариантности $b_{(ikj)}$ следует наложить на коэффициенты C^s_r условие

$$C^1_1C^2_2C^3_3+C^3_1C^1_2C^2_3+C^2_1C^3_2C^1_3-C^3_1C^2_2C^1_3-C^1_1C^3_2C^2_3-C^2_1C^1_2C^3_3 \equiv \Delta_c = 1, \qquad \text{(П.1.7)}$$

обобщающее (4.2.13) в теории БСКО ранга (3,3). Это два условия на 18 вещественных параметров.

8. Таким образом, можно утверждать, что налицо аналоги всех трех составляющих в определении 2-компонентных

спиноров: векторы в комплексном пространстве, линейные преобразования и инвариантная относительно них антисимметричная форма, т. е. в теории БСКО ранга (4,4) возникают величины, которые естественно назвать 3-компонентными (финслеровыми) спинорами. Термин «финслеровы» обусловлен тем, что унарные геометрии с более общим, нежели общепринятым квадратичным, мероопределением принято называть финслеровыми геометриями.

Линейные преобразования (П.1.4) с условием (П.1.7) составляют *унимодулярную* (16-параметрическую) *группу* $SL(3, C)$. Эта группа преобразований играет в теории БСКО ранга (4,4) ту же роль, что 6-параметрическая группа $SL(2, C)$ в теории БСКО ранга (3,3).

Точно так же определяются финслеровы (сопряженные) спиноры во втором множестве элементов $\mathcal{N}$. (В тех случаях, когда возможны недоразумения, индексы сопряженных спиноров следует помечать точкой сверху.)

9. В формуле для спинорного инварианта (П.1.5) величина

$$g_{srl} = \varepsilon_{srl}$$

является метрическим спин-тензором, совпадающим с 3-индексным символом Леви-Чивиты.

Введенные выше компоненты 3-спиноров можно считать контравариантными. По аналогии со случаем 2-компонентных спиноров можно ввести соответствующие им ковариантные компоненты, которые в данном случае будут 2-компонентными.

Аналогично изложенному в главе 4 можно определить *обобщенные спинтензоры* как величины, преобразующиеся как произведения компонент спиноров. Очевидно также обобщение на смешанные спинтензоры (с ковариантными и контравариантными индексами). Легко также ввести соответствующие инварианты из спинтензорных величин.

П.2. 9-мерные векторы

Аналогично 4-мерию, перейдем от 3-компонентных спиноров к векторам. Это можно осуществить несколькими способами. Воспользуемся тем же способом, которым в главе 5 были введены 4-мерные векторы.

П.2.1. Определение векторов

1. Будем исходить из выражений для смешанных спинтензоров $B^{s\dot{r}}$, которые можно определить аналогично (4.4.2) для одной, двух или трех пар «сшитых» элементов. При выполнении условий «сшивки» (4.1.5) матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} & B^{1\dot{3}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} & B^{2\dot{3}} \\ B^{3\dot{1}} & B^{3\dot{2}} & B^{3\dot{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 + B^3 & B^1 - iB^2 & B^4 - iB^5 \\ B^1 + iB^2 & B^0 - B^3 & B^6 - iB^7 \\ B^4 + iB^5 & B^6 + iB^7 & B^8 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv B^0\lambda_0 + \sum_{l=1}^{8} B^l\lambda_l, \qquad (П.2.1)$$

где $B^0, B^1, \ldots, B^8$ — девять вещественных чисел,

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (П.2.2)$$

а λ_l — восемь эрмитовых *матриц Гелл-Манна*, играющих в теории 3-компонентных спиноров такую же роль, что и матрицы Паули σ_l в теории 2-компонентных спиноров.

2. Запишем матрицы Гелл-Манна в следующем представлении:

$$
\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
$$

$$
\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};
$$

$$
\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (П.2.3)
$$

$$
\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Нетрудно записать ряд соотношений между матрицами λ_l, в некотором смысле аналогичные (4.4.4), однако теперь эти матрицы не являются образующими какой-либо алгебры Клиффорда.

Отметим, что это представление отличается от обычно используемого видом матрицы λ_8:

$$
\lambda_8' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad (П.2.4)
$$

3. Из формулы (П.2.1) нетрудно выразить вещественные числа B^0 и B^l через компоненты спинтензора $B^{s\dot{r}}$. Пусть спинтензор определен для трех «сшитых» пар элементов, когда

$$
B^{s\dot{r}}_{(3)} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}} + j^s\gamma^{\dot{r}}. \qquad (П.2.5)
$$

В этом случае имеем

$$
\begin{aligned}
B^0_{(3)} &= \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2\right);\\
B^1_{(3)} &= \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 + j^2\gamma^1\right);\\
B^2_{(3)} &= \frac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 - j^2\gamma^1\right);\\
B^3_{(3)} &= \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 - j^2\gamma^2\right);\\
B^4_{(3)} &= \frac{1}{2}\left(i^1\alpha^3 + i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 + k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 + j^3\gamma^1\right);\\
B^5_{(3)} &= \frac{i}{2}\left(i^1\alpha^3 - i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 - k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 - j^3\gamma^1\right);\\
B^6_{(3)} &= \frac{1}{2}\left(i^2\alpha^3 + i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 + k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 + j^3\gamma^2\right);\\
B^7_{(3)} &= \frac{i}{2}\left(i^2\alpha^3 - i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 - k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 - j^3\gamma^2\right);\\
B^8_{(3)} &= i^3\alpha^3 + k^3\beta^3 + j^3\gamma^3.
\end{aligned}
\tag{П.2.6}
$$

4. В принципе, можно определить величины B^A с разными знаками вкладов сопряженных пар, составляющих $B^{s\dot{r}}$, а также для случаев, когда спинтензор определен для одной

$$B^{s\dot{r}}_{(1)} = i^s\alpha^{\dot{r}} \tag{П.2.7}$$

или для двух «сшитых» пар, например

$$B^{s\dot{r}}_{(2)} = i^s\alpha^{\dot{r}} \pm k^s\beta^{\dot{r}}. \tag{П.2.8}$$

Очевидно, что в этих случаях первые четверки компонент совпадают с величинами, определенными в (4.4.6) и в (4.4.15). Здесь для них сохранены те же самые обозначения.

5. Зная коэффициенты преобразований спинорных компонент в (П.1.4), можно найти векторный закон преобразований компонент B^A относительно группы $SL(3, C)$ в 9-мерном многообразии

$$B'^A = L^A_{\cdot B} B^B, \tag{П.2.9}$$

где коэффициенты линейных преобразований $L^A_{\cdot B}$ выражаются через квадратичные комбинации из коэффициентов C^r_s и $\overset{*}{C}{}^r_s$ аналогично (4.4.8).

6. Отметим, что комбинация компонент $B^0 + (1/2)B^8$ выражается через парные отношения (П.1.2), а они при преобразованиях из группы $SU(3)$ не изменяются. Следовательно, такие 8-параметрические преобразования затрагивают лишь 8 компонент (комбинаций) векторов. Они соответствуют 3-параметрическим пространственно-подобным поворотам в 4-мерной теории.

П.2.2. 9-мерные инварианты

1. Введем спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot r\dot p\dot n} B^{s\dot r} B^{l\dot p} B^{m\dot n} = \begin{vmatrix} B^{1\dot 1} & B^{1\dot 2} & B^{1\dot 3} \\ B^{2\dot 1} & B^{2\dot 2} & B^{2\dot 3} \\ B^{3\dot 1} & B^{3\dot 2} & B^{3\dot 3} \end{vmatrix}, \tag{П.2.10}$$

непосредственно обобщающий инвариант (4.4.12) в теории 2-компонентных спиноров. Подставляя сюда компоненты 9-мерного вектора B^A из (П.2.6), находим

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot r\dot p\dot n} B^{s\dot r} B^{l\dot p} B^{m\dot n} \equiv G_{ABC} B^A B^B B^C =$$

$$= B^8\left((B^0)^2 - (B^1)^2 - (B^2)^2 - (B^3)^2\right) + 2B^1\left(B^4 B^6 + B^5 B^7\right) -$$

$$- B^0\left((B^4)^2 + (B^5)^2 + (B^6)^2 + (B^7)^2\right) + 2B^2\left(B^5 B^6 - B^4 B^7\right) +$$

$$+ B^3\left((B^4)^2 + (B^5)^2 - (B^6)^2 - (B^7)^2\right). \tag{П.2.11}$$

Это кубичное по компонентам вектора выражение заменяет 4-мерную релятивистски инвариантную квадратичную форму (4.4.13). При данном обобщении **происходит не просто увеличение размерности с четырех до девяти, но и изменение характера мероопределения**. Напомним, что в известных работах по многомерным теориям Калуцы и Клейна обычно используется постулат квадратичного (риманова) мероопределения. В данном же случае получается **унарная финслерова геометрия с кубичным мероопределением**.

2. Следует особо подчеркнуть, что для случая, когда $B^{s\dot{r}}$ определено через три пары сопряженных элементов, инвариант (П.2.11) совпадает с фундаментальным 3×3-отношением для этих элементов, т. е.

$$G_{ABC} B^{A}_{(3)} B^{B}_{(3)} B^{C}_{(3)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}. \qquad (П.2.12)$$

Для трех пар элементов этот инвариант в общем случае отличен от нуля.

3. Величины G_{ABC} в (П.2.11) и в последующих формулах естественно назвать *трехиндексным метрическим тензором*. При определении кубичного инварианта он обобщает метрический тензор $\eta_{\mu\nu}$ 4-мерного пространства Минковского (в декартовых координатах). Метрика G_{ABC} имеет 729 компонент [14]. Отличными от нуля являются только 60, из них 27 имеют знак плюс и 33 – знак минус.

Отметим, что в финслеровой геометрии с кубичным мероопределением нет аналога закона инерции квадратичных форм, что не позволяет использовать понятие сигнатуры в том же смысле, что и в общепринятой геометрии.

4. Когда $B^{s\dot{r}}$ определено на двух парах сопряженных элементов, согласно (П.2.8), инвариант (П.2.11) тождественно об-

ращается в нуль:

$$G_{ABC}B^A_{(2)}B^B_{(2)}B^C_{(2)} = 0. \qquad \text{(П.2.13)}$$

На этом основании векторы вида $B^A_{(2)}$ можно назвать *изотропными, точнее – единожды изотропными*, в теории БСКО ранга (4,4).

5. Для случая, когда $B^{s\dot{r}}$ определено на одной паре сопряженных элементов, согласно (П.2.7), опять получаем равный нулю инвариант, однако теперь он распадается на сумму двух инвариантов, в отдельности равных нулю, так как

$$G_{ABC}B^A_{(1)}B^B_{(1)}B^C_{(1)} \equiv 0; \qquad \text{(П.2.14)}$$

$$B^8_{(1)}\left((B^0_{(1)})^2 - (B^1_{(1)})^2 - (B^2_{(1)})^2 - (B^3_{(1)})^2\right) = B^8_{(1)}\eta_{\mu\nu}B^\mu_{(1)}B^\nu_{(1)} = 0. \qquad \text{(П.2.15)}$$

По этой причине 9-мерный вектор, построенный на одной паре сопряженных элементов, можно назвать *дважды изотропным*. Он аналогичен общепринятому изотропному вектору $k^\mu(i\alpha)$, определенному в 4-мерной теории, согласно (4.4.6).

6. Аналогично 4-мерной формуле (4.4.17) (скалярного произведения двух векторов), скалярное произведение трех векторов, определенных на разных тройках элементов, можно переписать через отдельные инварианты вида (П.1.3), определенные для всех возможных троек элементов, входящих в их определения:

$$6\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(mnl), \vec{B}(rst)\right) = \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ ikj\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu\nu\lambda\\ mnl\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\rho\sigma\tau\\ rst\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha\mu\rho\\ imr\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\mu\sigma\\ ims\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\mu\tau\\ imt\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\nu\rho\\ inr\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\nu\sigma\\ ins\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\nu\tau\\ int\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\lambda\rho\\ ilr\end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix}\alpha\lambda\sigma\\ ils\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\lambda\tau\\ ilt\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\mu\rho\\ kmr\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\mu\sigma\\ kms\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\mu\tau\\ kmt\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\nu\rho\\ knr\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\nu\sigma\\ kns\end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix}\beta\nu\tau\\knt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\lambda\rho\\klr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\lambda\sigma\\kls\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\lambda\tau\\klt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\mu\rho\\jmr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\mu\sigma\\jms\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\mu\tau\\jmt\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\gamma\nu\rho\\jnr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\nu\sigma\\jns\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\nu\tau\\jnt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\rho\\jlr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\sigma\\jls\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\tau\\jlt\end{bmatrix}. \tag{П.2.16}$$

П.3. Переходы от БСКО ранга (4,4) к унарным геометриям

Исходя из БСКО ранга (4,4), можно построить несколько унарных систем вещественных отношений (унарных геометрий) на основе обобщений способов, использованных в случае БСКО ранга (3,3). Изложенный выше переход от финслеровых спиноров к 9-мерным вещественным векторам составляет основу для построения унарных геометрий.

В данном случае можно получить больше геометрий, причем принципиально нового вида — финслеровых геометрии.

Придерживаясь методики перехода от БСКО ранга (3,3) к пространству скоростей (к пространству Лобачевского), в рамках теории БСКО ранга (4,4) естественно определить *обобщенное пространство скоростей* для специальных образований, составленных из шестерок (из трех пар) сопряженных элементов. Такие образования — элементы новой УСВО — строятся из бинарных элементов согласно рис. П.1. На этом рисунке новые элементы обозначены одним латинским индексом.

В новом множестве $\mathcal{M}'$ следует определить *внутренние отношения* для каждого из новых элементов в виде

$$a_{iii}=\begin{bmatrix}\alpha\mu\nu\\imn\end{bmatrix}=C_3, \tag{П.3.1}$$

где $i, m, n, \alpha, \mu, \nu$ — первичные элементы БСКО, образующие новый элемент i УСВО. Здесь, как и в главе 4, положено,

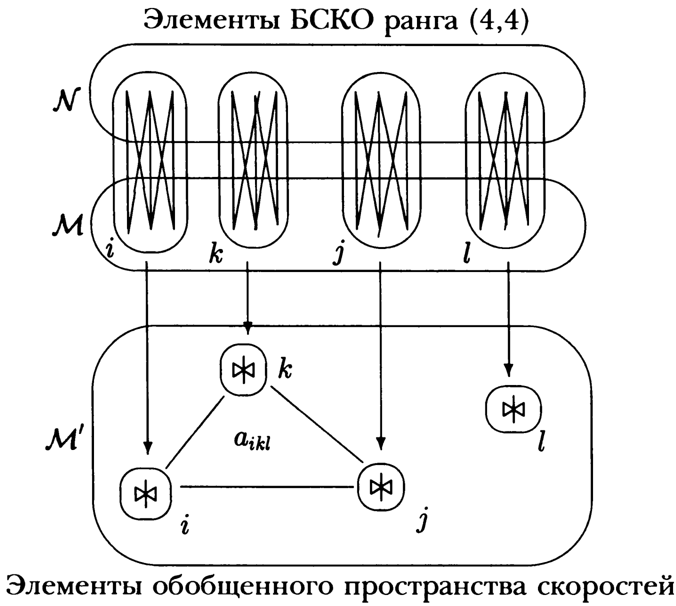


Рис. П.1. Переход от БСКО ранга (4,4) к обобщенному (финслеровому) пространству скоростей

что все внутренние отношения одинаковы, т. е. нормированы на некую постоянную величину C_3, которую можно положить равной единице. *Перекрестные тройные отношения* определяются с помощью общей формулы (П.2.16)

$$a_{ikl} = \big(\vec{B}(imn), \vec{B}(kps), \vec{B}(ltb)\big). \qquad \text{(П.3.2)}$$

Здесь, как и в главе 3 при определении обобщенных скоростей, полагается, что векторы $\vec{B}(imn)$ построены симметрично из трех сопряженных пар элементов, т. е. все три дважды изотропные составляющие входят с одинаковыми знаками плюс.

От аналога геометрии Лобачевского можно перейти к финслерову аналогу геометрии Минковского. Более подробно этот и другие близкие вопросы рассмотрены в ряде наших других публикаций [6, 9].

П.4. Выводы и замечания

1. Изложенный в Приложении материал показывает **много общего** в теориях БСКО рангов (3,3) и (4,4):
   1) в обеих теориях по одинаковым правилам вводятся комплексные спиноры;
   2) по одним и тем же правилам из спиноров строятся компоненты вещественных векторов;
   3) на основе определения вещественных векторов осуществляется переход от БСКО к унарным системам вещественных отношений (к унарным геометриям);
   4) в обеих теориях по схожим правилам можно определить частицы через матрицы из параметров элементов (компонент спиноров), ее составляющих;
   5) для частиц можно записать прообразы уравнений Дирака (для свободных частиц) в импульсном пространстве.

2. Однако имеются и **существенные различия**, обусловленные большим числом параметров элементов в БСКО ранга (4,4):
   1) между ко- и контравариантными компонентами финслеровых спиноров отсутствуют известные соответствия, поскольку теперь антисимметричный метрический спинтензор имеет не два, а три индекса;
   2) из БСКО ранга (4,4) строятся векторы значительно большей размерности $n = 9$, что позволяет утверждать, что **размерность $n = 4$ общепринятой классической геометрии обусловлена проявлением именно БСКО ранга (3,3)**;
   3) в рамках БСКО ранга (4,4) инварианты строятся не квадратичным образом, а в виде кубичных комбинаций из компонент векторов, — получается финслерова геометрия,

что позволяет утверждать, что **общепринятое квадратичное мероопределение обусловлено БСКО ранга (3,3)**;

4) в теории БСКО ранга (4,4), кроме неизотропных векторов, **имеются два вида изотропных векторов: единожды и дважды изотропные**, что определяется количеством элементов, участвующих в определении вектора;

5) трем видам векторов в теории БСКО ранга (4,4) соответствуют три вида унарных (финслеровых) геометрий, определяемых «сшивкой» одной, двух и трех пар элементов БСКО в новый элемент УСВО.

Литература

1. *Арифов Л. Я.* Общая теория относительности и тяготение. Ташкент: ФАН, 1983.
2. *Блюменталь Л. М.* (Blumental L. M.). Theory and application of distance geometry. Oxford, 1953.
3. *Владимиров Ю. С.* Модель квантованного пространства-времени // Классическая и квантовая теория гравитации. Минск: Изд-во Института Физики АН БССР, 1976. С. 57–58.
4. *Владимиров Ю. С., Турыгин А. Ю.* Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1986.
5. *Владимиров Ю. С., Соловьев А. В.* Физическая структура ранга (4,4;6) и трехкомпонентные спиноры // Вычислительные системы. № 135. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990. С. 44–66.
6. *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть I. Теория систем отношений. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1996.
7. *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть II. Теория физических взаимодействий. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1998.
8. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. (2-е издание). М.: БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2009. 568 с.
9. *Владимиров Ю. С.* Основания физики. М.: БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2008. 456 с.
10. *Владиморов Ю. С.* Между физикой и метафизикой. Книга 1. Диамату вопреки. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2012.
11. *Владимиров Ю. С.* Между физикой и метафизикой. Книга 4. Вслед за Лейбницем и Махом. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2011.

12. *Владимиров Ю. С., Соловьев А. В.* Финслеровы n-спиноры с комплексными компонентами // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009. Т. 5. № 2 (10). С. 90–100.
13. *Кулаков Ю. И.* Элементы теории физических структур (Дополнение Г. Г. Михайличенко). Новосибирск: Изд-во Новосиб. ГУ, 1968.
14. *Кулаков Ю. И.* О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа // Доклады АН СССР. 1971. Т. 201. № 3. С. 570–572.
15. *Кулаков Ю. И., Владимиров Ю. С., Карнаухов А. В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.: Архимед, 1991.
16. *Кулаков Ю. И.* Теория физических структур. М., 2004, 847 с.
17. *Лев В. Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3) // Вычислительные системы. № 101. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1984. С. 91–113.
18. *Лев В. Х.* Двумерные и трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. № 118. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1986. С. 28–36.
19. *Лев В. Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. № 125. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988. С. 90–103.
20. *Лейбниц Г. В.* Переписка с Кларком // Сочинения в четырех томах. Т. 1. М.: Мысль, 1982. С. 430–528.
21. *Мах Э.* Познание и заблуждение. М.: БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2003.
22. *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк ее развития. Ижевск: Ижевск. республ. типогр., 2000.
23. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 5. С. 1056–1058.
24. *Михайличенко Г. Г.* Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алтайского ун-та., 1997. 144 с.
25. *Михайличенко Г. Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 2001. 144 с.

26. *Нарликар Дж. В.* (Narlikar J. V.). Инерция и космология в теории относительности Эйнштейна // Сб. «Астрофизика, кванты и теория относительности». М.: Мир, 1982. С. 498–534.
27. *Пенроуз Р.* (Penrose R.). Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.
28. *Пенроуз Р., Риндлер В.* (Penrose R., Rindler V.) Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987.
29. *Синг Дж.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
30. *Соловьев А. В.* К теории бинарных физических структур ранга (5,5;б) и выше // Вычислительные системы. № 135. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990. С. 67–77.
31. *Соловьев А. В., Владимиров Ю. С.* (Solov'yov A. V., Vladimirov Yu. S.) Finslerian N-spinors: Algebra // International Journal of Theoretical Physics. 2001. Vol. 40. № 8. P. 1511–1523.
32. Твисторы и калибровочные поля. М.: Мир, 1983.
33. *Уилер Дж., Фейнман Р.* (Wheeler J. A., Feynman R. P.) Interaction with the absorber as the mechanism of radiation // Rev. Mod. Phys. 1945. V. 17. P. 157–181.
34. *Уилер Дж.* Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
35. *Фишер К.* Лейбниц, его жизнь, сочинения и учение. СПб.: Издание Д. Е. Жуковского, 1905.
36. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966.

Представляем Вам следующие книги:

URSS

Серия «Наука в СССР: Через тернии к звездам»

- *Шноль С. Э.* **Герои, злодеи, конформисты отечественной науки.**
- *Сарданашвили Г. А.* **Я — ученый: Заметки теорфизика.**
- *Сарданашвили Г. А.* **Дмитрий Иваненко — суперзвезда советской физики.**
- *Владимирова Л. Ф.* **От квантовой механики к общей теории относительности. Академик В. А. Фок: Теоретическая физика в чистом виде.**

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

- *Чернавский Д. С.* **Синергетика и информация.**
- *Малинецкий Г. Г.* **Математические основы синергетики.**
- *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* **Нелинейная динамика и хаос: основные понятия.**
- *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В.* **Нелинейная динамика.**
- *Малинецкий Г. Г.* (ред.) **Нелинейность в современном естествознании.**
- *Малинецкий Г. Г.* (ред.) **Будущее и настоящее России в зеркале синергетики.**
- *Малинецкий Г. Г.* (ред.) **Синергетика: Исследования и технологии.**
- *Суздалев И. П.* **Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов.**
- *Климонтович Ю. Л.* **Турбулентное движение и структура хаоса.**
- *Ланда П. С.* **Нелинейные колебания и волны.**
- *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* **Стохастические и хаотические колебания.**
- *Данилов Ю. А.* **Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение.**
- *Трубецков Д. И.* **Введение в синергетику.** В 2 кн.: **Колебания и волны; Хаос и структуры.**
- *Безручко Б. П. и др.* **Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях.**
- *Олемской А. И.* **Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория.**
- *Анищенко В. С.* **Знакомство с нелинейной динамикой.**
- *Анищенко В. С.* **Сложные колебания в простых системах.**
- *Белецкий В. В.* **Очерки о движении космических тел.**
- *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* **Основания синергетики: Синергетическое мировидение.**
- *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* **Основания синергетики: Человек, конструирующий себя и свое будущее.**
- *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* **Синергетика: Нелинейность времени и ландшафты коэволюции.**
- *Арнольд В. И.* **Теория катастроф.**
- *Алексеев Ю. К., Сухоруков А. П.* **Введение в теорию катастроф.**
- *Быков В. И.* **Моделирование критических явлений в химической кинетике.**
- *Быков В. И., Цыбенова С. Б.* **Нелинейные модели химической кинетики.**
- *Абаимов С. Г.* **Статистическая физика сложных систем.**
- *Кляцкин В. И.* **Очерки по динамике стохастических систем.**
- *Редько В. Г.* **Эволюция, нейронные сети, интеллект.**
- *Тюкин И. Ю., Терехов В. А.* **Адаптация в нелинейных динамических системах.**
- *Турчин П. В.* **Историческая динамика: На пути к теоретической истории.**
- *Гуц А. К., Фролова Ю. В.* **Математические методы в социологии.**
- *Васильков Г. В.* **Эволюционная теория жизненного цикла механических систем.**
- *Долгоносов Б. М.* **Нелинейная динамика экологических и гидрологических процессов.**

ТЕЛЕФОН / ФАКС (многоканальный)
+7 (499) 724–25–45

От м. Профсоюзная:

8 мин. пешком
или одна остановка
наземным транспортом:

автобусы № 67, 67к, 130;

троллейбус № 49

до остановки
«Ул. Ивана Бабушкина»

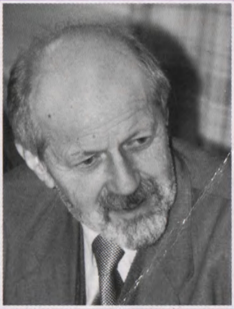
От м. Университет:

трамваи № 14, 39
до остановки
«Черемушкинский рынок»;

трамваи № 22, 26
до остановки
«Ул. Вавилова»;

автобусы № 67, 67г, 130;
троллейбус № 49
до остановки
«Ул. Ивана Бабушкина»

Об авторе



Юрий Сергеевич ВЛАДИМИРОВ

Физик-теоретик, доктор физико-математических наук (1976), профессор кафедры теоретической физики физического факультета МГУ, профессор Института гравитации и космологии Российского университета дружбы народов, вице-президент Российского гравитационного общества, главный редактор альманаха «Метафизика. Век XXI». Окончил физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова в 1961 г. Область научных интересов: классическая и квантовая теория гравитации, проблема объединения физических взаимодействий, многомерные модели физических взаимодействий, теория прямого межчастичного взаимодействия, теория систем отношений, метафизические и философские проблемы теоретической физики. Ю. С. Владимиров — автор ряда монографий, среди которых: «Системы отсчета в теории гравитации» (1982), «Пространство-время: явные и скрытые размерности» (1989; 3-е изд. URSS, 2012), «Метафизика» (2002; 2009), «Геометрофизика» (2005), «Основания физики» (2008), «Классическая теория гравитации» (URSS, 2009) и др.

Физика дальнодействия: Природа пространства-времени Кн.1 Владимиров Ю.С.

9 785397 030878

ID: 163725